

多層波動方程式における減衰定常波モード について

金山 進¹

¹正会員 五洋建設(株) 技術研究所 (〒329-2746 栃木県那須塩原市四区町1534-1)

E-mail:susumu.kanayama@mail.penta-ocean.co.jp

ペレグリン型のブシネスク方程式を連成させた多層波動方程式に対して、線形分散関係の固有ベクトルとして導かれる減衰定常波の特性を調べることで、ステップ地形での波浪解析に対する基本的な適用性を検討した。波動モデルの固有ベクトルは分割層数と同じだけ存在し、1つは進行波、他は減衰定常波に対応する。層を等分割とした場合の固有ベクトルは微小振幅波理論によるものと次数毎に類似し、分割層数を大きくするほど高次の固有関数が再現できる。変則な層分割を用いた場合の固有ベクトルは、微小振幅波理論とは異なった形状となることがあるが、ステップ地形の散乱解析に多層波動方程式の固有ベクトルを用いたところ、等分割の場合に限らず、反射率、透過率および流速分布は解析解と良好に整合した。

Key Words : Step-like bathymetry, scattering problem, evanescent waves, multi-level wave model

1. はじめに

遠隔離島やリーフエッジにおける波浪変形評価手法の構築は、今後のわが国の海洋開発において重要な課題となることが予想される。これらのサイトは、多くの場合、大水深の海域に急峻に立ち上がるとともに珊瑚礁に囲まれたステップ状の地形となっており、高波浪時における波浪変形は間欠的なエッジの干出や気相の巻き込みなどを伴う非常に複雑な碎波現象となる（例えば、中嶋ら¹⁾）。これに対するアプローチとして、数値波動水槽や粒子法などの高精度解析手法以外にも、実験に基づく碎波モデルとシンプルな波浪変形モデルを組み合わせた実務的な手法が有力と考えられる。後者の場合、基調とすべき波浪変形モデルは、複雑な碎波現象の基盤となっている基本的現象、すなわち大水深での3次元的な散乱問題を扱えるものである必要があり、高い分散性とともな減衰定常波モードの取り扱いが可能であることが望ましい。本研究は、金山²⁾の多層波動方程式に対して減衰定常波モードに関する検討を加え、上記の基調波浪変形モデルとしての可能性を調べたものである。

モデル方程式の進行波モードと減衰定常波モードの特性を線形分散関係に基づいて検討した例として、非線形関勾配方程式を対象としたPeixi・Isobe³⁾の研究を参考と

した。ただし、4次の固有値までを対象としたPeixi・Isobeでは固有多項式を直接取り扱っているが、本研究では対象とする次数が高いため、行列演算による手法を用いた。

2. 多層波動方程式の分散関係と固有ベクトル

(1) 線形化された多層波動方程式

ここで対象とする多層波動方程式は、静水深を N 個の層に分割して設定した各層内の鉛直流速を深度 z の1次式、水平流速を2次式で表現し、オイラーの運動方程式と連続式に代入することによって得られたものであり、基本的にはペレグリン型のブシネスク方程式を多層連成させた形となっている。全ての非線形項を除去した1次元水平床の方程式系は以下の通りである。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^N d_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \sum_{i=1}^N \alpha_{n,i} \frac{\partial^3 u_i}{\partial t \partial x^2} \quad (2)$$

式(1)は連続式であり、運動方程式(2)は分割層数、すな

わち \$N\$ 本存在する. \$\eta\$ は水位, \$d_n\$ は各層の層厚, \$u_n\$ は各層の平均水平流速である. 層番号は静水面に接する最上層を1とし, 最下層が \$N\$ となる.

分散係数 \$\alpha_{n,i}\$ は第 \$n\$ 層の水平流速に対する第 \$i\$ 層の水平流速の寄与を表す係数であり, 式(3)のように4つの部分に分けると表示が容易である.

$$\alpha_{n,i} = \alpha 1_{n,i} + \alpha 2_{n,i} + \alpha 3_{n,i} + \alpha 4_{n,i} \quad (3)$$

$$\alpha 1_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \leq 1) \\ \sum_{m=1}^{n-1} d_m d_i & (n \geq 2, i \geq n) \\ \sum_{m=1}^{i-1} d_m d_i & (n \geq 2, i \leq n-1) \end{cases} \quad (4)$$

$$\alpha 2_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \leq 1) \\ \frac{1}{2} d_i^2 & (n \geq 2, i \leq n-2) \end{cases} \quad (5)$$

$$\alpha 3_{n,i} = \begin{cases} \frac{1}{2} d_n d_i & (n \leq i-1) \\ 0 & (n \geq i) \end{cases} \quad (6)$$

$$\alpha 4_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \neq i) \\ \frac{1}{3} d_i^2 & (n = i) \end{cases} \quad (7)$$

なお, 各層内での水平流速の鉛直分布は以下のように与えられる.

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}_n + \frac{1}{6} (d_n^2 - 3(h_n + z)^2) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_n}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (d_n - 2(h_n + z)) \sum_{i=n+1}^N d_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x^2} \quad (8)$$

(2) 分散関係と固有ベクトル

式(1), (2)に式(9)を代入して \$\eta\$ を消去すると \$\hat{u}_i\$ に対する代数方程式(10)が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta \exp(kx - \omega t) \\ u_n &= \hat{u}_n \exp(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$gk^2 \sum_{i=1}^N d_i \hat{u}_i - k^2 h^2 \omega^2 \sum_{i=1}^N \alpha_{n,i} \hat{u}_i + \omega^2 \hat{u}_n = 0 \quad (10)$$

式(10)に対して \$\hat{u}_i\$ が自明でない解を有するような波数 \$k\$ と周波数 \$\omega\$ の条件が多層波動方程式の線形分散関係となる. なお, \$h\$ は水深である. 式(10)は, 各層の平均流速振幅を成分とする \$N\$ 列のベクトル \$\mathbf{u}\$ と \$N\$ 行 \$N\$ 列の行列 \$\mathbf{A}\$ を用いて, 以下のような固有値問題として表現できる.

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \frac{1}{(kh)^2} \mathbf{u} \quad (11)$$

ここで, 行列 \$\mathbf{A}\$ の係数 \$a_{ij}\$ は以下の通りである.

$$a_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{gd_j}{\omega^2 h^2} \quad (12)$$

行列 \$\mathbf{A}\$ は, 層を等分割とした場合は対称であるが, それ以外は非対称であり, 固有ベクトル系 \$\{\mathbf{x}_j\}\$ は一般的には直交系ではない. ただし, 数学的な裏付けを得てはいないが, 以下のような関係が成立するようである.

$$\mathbf{x}_m \bullet (\mathbf{B} \mathbf{x}_n) = (\mathbf{B} \mathbf{x}_m) \bullet \mathbf{x}_n = 0 \quad (m \neq n) \quad (13)$$

ここで, \$\mathbf{B}\$ は層厚 \$d_i\$ が主軸上に並んだ行列であり, その成分 \$b_{ij}\$ は以下のように与えられる.

$$b_{ij} = d_i \delta_{ij} \quad (14)$$

式(10)の固有値問題を満たす固有値 \$1/(kh)^2\$ は \$N\$ 個存在し, 1個が負値, \$N-1\$ 個が正値である. 微小振幅波理論と同様, 負の固有値, すなわち虚数の波数を有する唯一のモードが進行波に対応し, 他のモードは減衰定常波に対応する. ただし, 微小振幅波理論の場合, 減衰定常波のモード数は無限である.

図-1は, 上記の方法で得られる多層波動方程式の固有値 \$1/(kh)^2\$ を式(15)から得られる理論値に対する比率で整理したものである.

$$\omega^2 = -gk \tan kh \quad (15)$$

5層, 10層および20層の等分割のモデルに加え, 分割層数は10であるが, 第 \$n\$ 層が第1層の \$n\$ 倍の厚さとなるように設定したもの (モデル1) と第1層から第8層までを水深の5%, 第9層を20%, 第10層を40%としたもの (モデル2) についても検討した. モデル1は進行波モー

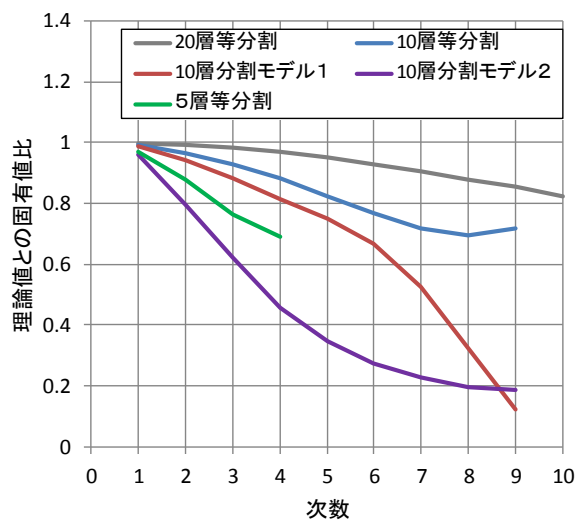


図-1 減衰定常波の次数と固有値

ドの線形分散関係の理論との整合が高く、層数の増加に伴う理論式への漸近は等分割のモデルよりも早いことが確認されている²⁾.

いずれのモデルも次数の増加とともに理論値に対する比率は低下する. 等分割の場合は, 最高次のモード (10層モデルでは9次, 5層モデルでは4次) においても7割程度までの低下である. 一方, 等分割ではないモデル1では, 7次モードから急激に比率が低下しており, モデル2では2次モードにおいて既に5層等分割モデルよりも比率の低下が顕著である. 図-1の結果は, 水深10m, 周期4s ($\omega^2 g/h=2.5$) のものだが, 他の条件でも同様な結果であった.

図-2は, 多層波動方程式の減衰定常波モードの固有ベクトルを示したものであり, 5層, 10層および20層の等分割モデルに対するものである. 分割層の midpoint に丸印で示された固有ベクトルに加え, 式(8)に基づく鉛直分布を同色の破線で示す. 黒の実線は微小振幅波理論によるものである. 固有ベクトルの大きさ自体は任意であるので, ベクトルについては各成分の2乗和に水深を乗じた値の平方根, 関数については2乗値の鉛直積分値の平方根がいずれも1となるように規格化してある. したがって, 同色の破線と丸印が必ずしも重ならない場合もある.

図-1にみられた固有値の低下の影響は, 固有ベクトル形状にはそれほど明確に現れないようであり, 1~3の低次モードでは層数による違いは殆どみられない. 5層モデルに現れる最も高い次数である4次モードでは5層モデルの固有ベクトル自体は理論線上にほぼ乗っているが, 破線の補間関数に若干逸脱がみられる. 10層モデルの最高次である9次モードでも同様な現象が生じている. 分解能が足りないため, 曲率の精度が低下したものと考えられる. 一方, 20層のモデルは9次モードの時点ではほぼ理論式に整合している. このように, 等分割の場合は, 多層波動方程式の減衰定常波は, 層数の増加とともに微小振幅波理論のものに漸近すると考えられる. したがって, 海底地形や構造物などによる散乱問題について, 少

なくとも線形の範囲では高い適用性を有すると推定される.

しかしながら, 層分割を任意に設定できることは多層波動方程式の特長の一つであり, 浅いリーフ地形から急激に大水深となるような場合には層分割方法の工夫は不可欠であり, 等分割という制約は望ましくない.

図-3および図-4は, 前出のモデル1とモデル2の分割による固有ベクトルを等分割および微小振幅波理論のものと比較したものである. 層分割が深度とともに徐々に粗くなるモデル1の場合, 低次モードは理論式と整合しているが, 層数に近い7や9の高次モードでは, 分割が詳細な表層付近に振動が集まり, 理論式とはかなり異なった形状となっている (図-3). また, 中層付近から急激に層厚が大きくなるモデル2では, 2次モードにおいて既にこの傾向が現れており, 固有値に関する図-1の結果と符合している.

このように, 等分割でない多層波動方程式は微小振幅波理論とは異なる減衰定常波の固有モードを有する可能性がある. しかし, 進行波モードも加えた固有ベクトル系は, 分割層数次元のベクトル空間において完備な系を成すため, 微小振幅波理論の固有関数系との形状の違いは, 直ちにステップ地形などによる散乱問題への適用性の否定に結びつくものではなく, さらなる検討が必要である.

3. 固有ベクトルを用いたステップ散乱解析

(1) ステップ散乱解析への固有ベクトルの適用

ステップ地形による波の線形散乱問題への多層波動方程式の適用性について, 固有関数ベクトル形状の比較とは別の視点から検討するため, ステップ散乱解析に多層波動方程式の固有ベクトルを適用する. 図-5のようなステップ散乱問題を設定する. x が正の沖側 (水深 h) 領域1での進行波モードおよび減衰定常波モードの固有ベクトルをそれぞれ, \mathbf{p}_0 および $\{\mathbf{p}_m\}$, 岸側 (水深 rh) 領

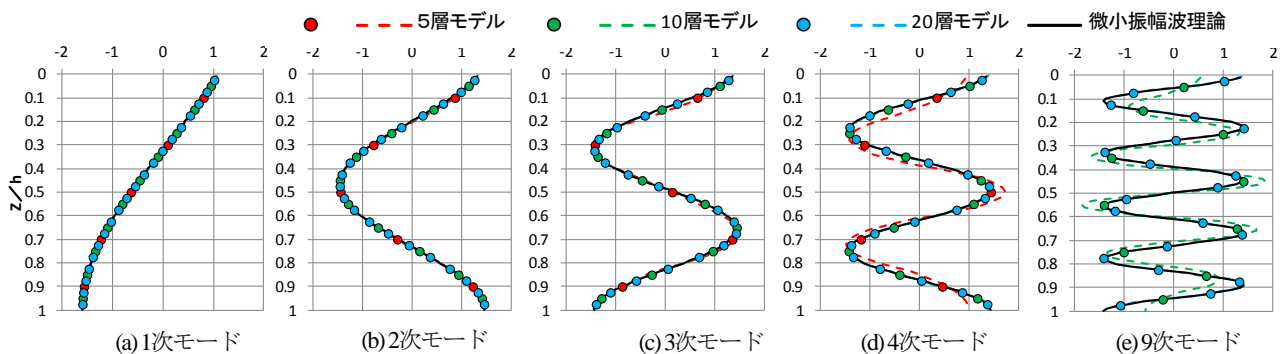


図-2 等分割の多層波動方程式の減衰定常モード固有ベクトル

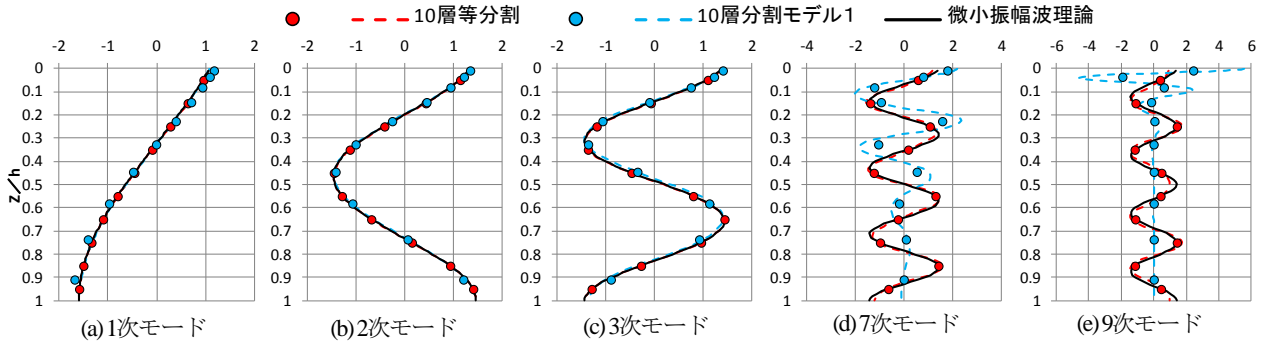


図-3 不等分割の多層波動方程式の減衰定常モード固有ベクトル (分割モデル1)

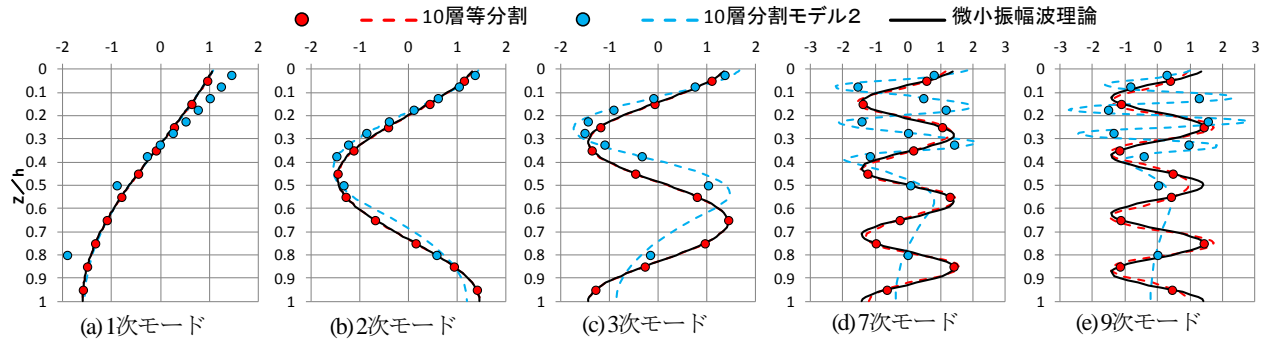


図-4 不等分割の多層波動方程式の減衰定常モード固有ベクトル (分割モデル2)

域2では、同じく \mathbf{q}_0 および $\{\mathbf{q}_n\}$ とする。領域1の層数を N_1 、領域2では N_2 とする。領域1の沖側から入射があるとすると、両領域の水平流速は以下のように表示できる。

$$\mathbf{u}_1(x) = (e^{ikx} - \text{Re}^{-ikx})\mathbf{p}_0 + \sum_{m=1}^{N_1-1} S_m \mathbf{p}_m e^{-k_m x} \quad (16)$$

$$\mathbf{u}_2(x) = \frac{T}{m_T} e^{ik'x} \mathbf{q}_0 + \sum_{n=1}^{N_2-1} C_n \mathbf{q}_n e^{k'_n x} \quad (17)$$

ここで、 k および k' は領域1および領域2での進行波の波数、 $\{k_m\}$ および $\{k'_n\}$ は減衰定常波の各モードの波数であり、係数 $\{S_m\}$ 、 $\{C_n\}$ および反射率 R 、透過率 T は散乱問題における未知数である。透過率 T を除している補正係数 m_T は、固有ベクトルが自身との内積の平方根、すなわちノルムが全て1に規格化されているのを両領域の水深での単位振幅の進行波同士の比率に換算するためのもので、以下のように与えられる。

$$m_T = \sqrt{\frac{n_1(\mathbf{B}\mathbf{q}_0) \cdot \mathbf{q}_0}{n_2(\mathbf{B}\mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{p}_0}} \quad (18)$$

ここで、 n_1 および n_2 は両領域における波速に対する群速度の比である。

両領域のポテンシャルは流速を x で積分して、以下のように表わせる。

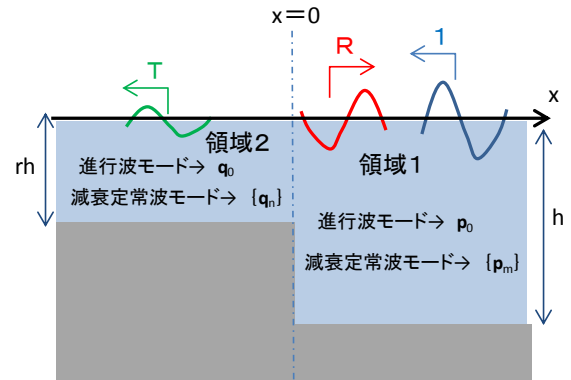


図-5 ステップ散乱問題の設定

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{ik} (e^{ikx} + \text{Re}^{-ikx})\mathbf{p}_0 - \sum_{m=1}^{N_1-1} \frac{S_m}{k_m} \mathbf{p}_m e^{-k_m x} \quad (19)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{ik'} \frac{T}{m_T} \mathbf{q}_0 e^{ik'x} + \sum_{n=1}^{N_2-1} \frac{C_n}{k'_n} \mathbf{q}_n e^{k'_n x} \quad (20)$$

$x=0$ における境界条件は、式(21)および式(22)で与えられるが、式(16)、式(17)の水平流速および式(19)、式(20)のポテンシャルを用いてこれらを表示すると、式(23)および式(24)が得られる。

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (0 > z > -h') \quad (21)$$

$$u_1 = \begin{cases} u_2 & (0 > z > -h') \\ 0 & (-h' > z - h) \end{cases} \quad (22)$$

$$\frac{\mathbf{p}_0}{k} R - \frac{\mathbf{q}_0}{k'} \frac{T}{m_T} - i \sum_{m=1}^{N_1-1} \frac{S_m}{k_m} \mathbf{p}_m \quad (23)$$

$$-i \sum_{n=1}^{N_2-1} \frac{C_n}{k'_n} \mathbf{q}_n = -\frac{\mathbf{p}_0}{k}, \quad (l=1 \sim N_2)$$

$$(1-R)\mathbf{p}_0 + \sum_{m=1}^{N_1-1} S_m \mathbf{p}_m = \begin{cases} \frac{T}{m_T} \mathbf{q}_0 + \sum_{n=1}^{N_2-1} C_n \mathbf{q}_n, & (l=1, N_2) \\ 0, & (l=N_2+1 \sim N_1) \end{cases} \quad (24)$$

式(23)および式(24)は未知数と条件数が一致する代数方程式となっており、これを解くことによって散乱場が決定する。

図-6は、このようにして得られたステップ散乱場における透過率 T と反射率 R を井島⁴⁾の方法で求められた解析値と比較したものである。領域1(沖側)の水深に対する領域2(岸側)の水深の比 r を0.1, 0.2および0.5の3通り設定した。領域1に対する層分割として、10層等分割、5層等分割に加え、先に検討したモデル2の分割方法を用いた。領域2には対応する層が充てられるため、深度 rh に層境界がなければならぬ。したがって、 r が0.2のケースのみ3通り全ての分割方法が適用でき、0.1のケースでは5層等分割が適用できず、0.5のケースでは10層等分割のみが適用可能である。

いずれの層分割方法を用いても透過率および反射率については良好な再現性が得られており、微小振幅波理論からの固有値低下や固有ベクトル形状の逸脱の影響はみられない。もともとモデル2の分割方法は r が小さい場合への適用を想定し、ステップ近傍の水深を集中的に細分化したものであるが、等分割のモデルと同様に良好な整

合を示している。

図-7は、10層等分割のモデルについて、ステップエッジ(図-5における $x=0$ の地点)における流速場の計算結果を井島の方法で求められた解析解(理論解による減衰定常波を50次モードまで考慮)と比較したものである。

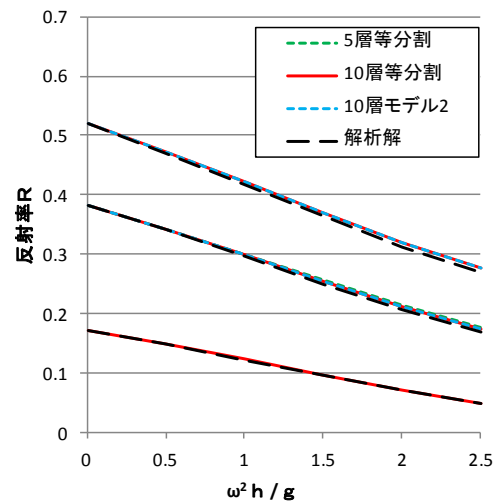
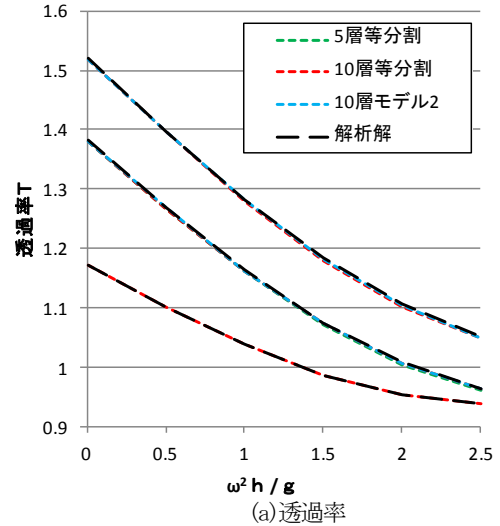


図-6 透過率と反射率

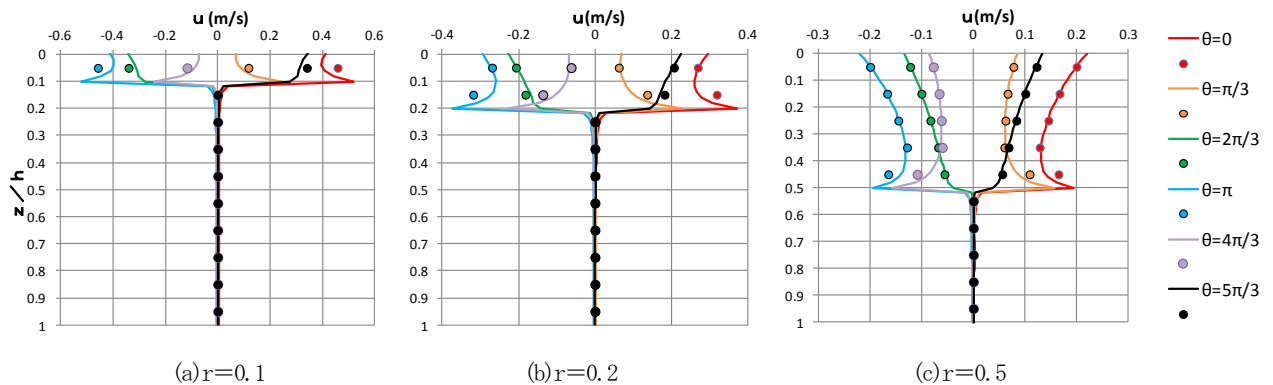


図-7 ステップエッジにおける流速場(10層等分割モデルと解析解; $\omega^2 h/g=2.0$)

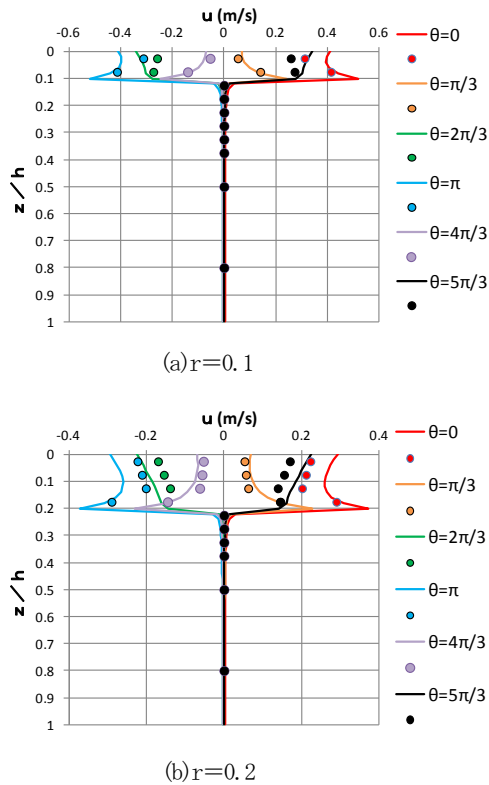


図-8 ステップエッジにおける流速場

(10層分割モデル2と解析解; $\omega^2 h/g=2.0$)

ベクトルによる解を丸印で、解析解を同色の実線で示した。概ね良好な整合といえるが、海底直上の成分の振幅がやや過大なようである。

図-8はモデル2の分割に対する結果である。全層的にはやや過小評価気味となっているが、海底直上の成分の振幅の再現性は向上している。モデル2の分割では、高次モードにおいて微小振幅波理論からの固有値低下や固有ベクトル形状の逸脱が著しかったが、このように透過率・反射率や流速場の再現性をみると概ね良好な結果となっている。

4. おわりに

線形化された多層波動方程式の線形分散関係の固有ベクトルとして導かれる減衰定常波の特性を調べることにより、ステップ地形での波浪解析に対する基本的な適用性を検討した。

水深を等分割した場合には、減衰定常波に対応する固有ベクトルが微小振幅波理論のものに漸近することが確認された。これは、等分割の多層波動方程式が流体の基礎方程式に従う散乱特性を有することを裏付けるものと考えられる。これらをステップ地形での散乱解析に用いたところ透過率・反射率および流速場は良好な精度で算定された。

一方、変則的な層分割を行った場合の固有ベクトルは微小振幅波のものとは異なる場合があるが、これらを用いた散乱解析結果は等分割のモデルと同様の精度を示した。不均一な鉛直代表点の設定によって固有関数の形状は変化するが、散乱特性は流体の基礎方程式に従うものと推定される。

参考文献

- 1) 中嶋さやか, 関本恒浩, 片山裕之, 高橋研也: 急勾配リーフ地形におけるリーフ上の波の変形に関する実験的研究, 土木学会論文集 B3 (海洋開発) Vol.67, pp. I_244-I_249, 2011.
- 2) 金山 進: 強分散性非線形平面波浪場に対する多層モデルの提案, 海岸工学論文集, 第44巻, pp.41-45, 1997.
- 3) Peixi, Z. and Isobe, M.: Analysis of dispersion and shoaling characteristics of linearized mild-slope equation, *Coastal Eng. J.*, Vol.40, No.2, pp.177-189, 1998
- 4) 井島武士: 最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用, 1971年度水工学に関する夏期研修会講義集, pp. B_1_1-B_1_31, 1971.

ANALYSIS OF EVANESCENT WAVES OF MULTI-LEVEL WAVE MODEL

Susumu KANAYAMA

To confirm the applicability of multi-level wave model for linear scattering problem by step-like bathymetry, characteristics of the eigenvectors obtained by dispersion relation of model equations were investigated. In the case of equally divided layers, the shape of the eigenvectors turned out to converge to that of the small amplitude wave theory, by the increasing number of layers. Although the eigenvectors of non-uniformly divided layers do not converge to that of the small amplitude wave theory, the results of scattering analysis with the eigenvectors have shown sufficient accuracy in the transmission and reflection coefficients.