

速度減衰機構を考慮した Convolutional PML の非線形 FEM 解析への適用

Investigation for applicability of Convolutional PML considering velocity damping in nonlinear FEM analysis

宇野 州彦* · 塩尻 弘雄**
Kunihiko Uno and Hiroo Shiojiri*修(工) 五洋建設株式会社 技術研究所 (〒329-2746 栃木県那須塩原市四区町 1534-1)
(九州大学大学院 工学府建設システム工学専攻 博士後期課程)

** 工博 日本大学教授 理工学部土木工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8)

Soil-structure interaction has significant effects on the dynamic responses of structures. In this paper, a time domain implicit PML for structure-foundation soil system is developed for FEM analysis to absorb outgoing waves at the artificial boundaries of numerical models. Symmetric coefficient matrices are derived not only for PML but also for convolutional PML considering velocity proportional damping to be consistent with most of FEM codes. The high performances of the proposed procedures for linear and nonlinear models subjected to seismic loading are demonstrated by numerical examples.

Key Words: boundary condition, nonlinear dynamic interaction, Convolutional PML, velocity damping

キーワード: 境界条件, 非線形動的相互作用, 畳み込み Perfectly Matched Layer, 速度減衰

1. はじめに

兵庫県南部地震では、橋梁や地中構造物、港湾施設やライフライン施設等の土木構造物は激甚な被害を受け、その後の耐震設計法は大幅な見直しを迫られた。それから10年以上経過した今日の耐震設計法においては、「道路橋示方書・同解説」¹⁾や「港湾の施設の技術上の基準・同解説」²⁾等に見られるように、構造物ごとの目標性能を設定し、これを満足するように設計する性能設計法へと移行しつつある。また近い将来、東海地震、南海地震、東南海地震や、首都圏直下型地震等も発生が懸念されており、性能設計法への期待と、耐震設計レベルのさらなる高度化が要求されている。

構造物の耐震設計においては、動的解析が主流となっており、また解析においても、地盤条件等を適切に考慮した上で構造物の応答を評価しなければならない^{例えば 3)-8)}。近年では、コンピュータ技術の発展と、先に述べた性能設計法に伴う変形解析のニーズの高まりから、地盤-構造物系の動的解析を行う機会が増えている。しかしながら、このようなFEM解析は、側方・底面境界で発生する反射波の影響により応答の精度が低下することを防ぐため、地盤のモデル化に大規模な領域が必要であり、結果として多

量の計算量を必要とする。これはコンピュータ能力の向上により、一部は対応可能な面もあるが、ソフトウェアの面でも計算量低減のアルゴリズム開発を行う必要がある。

近年、周波数領域での解析のみならず、時間領域での解析においても、高い性能で反射波を吸収するPML(Perfectly Matched Layer)⁹⁾⁻¹⁸⁾境界が提案されている。PMLは人工的に設定した層であり、インピーダンスを解析対象領域と等しく、かつ内部の波動を減衰させる働きを持たせる。また、PMLの特徴として、定式化にあたって地盤構造を仮定しないことから、盆地構造などの任意の不整形地盤も扱うことができる。

PMLを用いた数値解法では、FDTD法等の差分法での適用は進んでいる¹⁰⁾⁻¹²⁾。しかし構造物の耐震解析等は、有限要素法を使って行われるのが大部分であり、有限要素法に適用できるものが好ましい。Basuら¹³⁾⁻¹⁵⁾は、変数非分離型の陰解法での有限要素法への適用も行っている。ただし、Basuらの定式化では、周波数領域解析では係数マトリックスは対称となるが¹³⁾、時間領域解析では非対称となる^{14),15)}。通常の有限要素法の解析コードは、係数マトリックスが対称であることを利用して解いているものが多く、広く用いられるためには対称であることが望まれる。

また、通常の PML の座標変換係数を変えることにより、精度の向上と非線形問題までへの適用の可能性拡大も考えられるとし、それを効率的な解法を用いて解こうとする Convolutional PML^{16),17)}についても、FEM に適合した定式化と、係数マトリックスの対称化が望まれる。

著者らは、これまで固体の有限要素法に適合する対称な係数の PML の定式化、および PML を有する数値モデルに対する地震波入力方式の定式化を行い、具体例を挙げて地盤領域のモデル化範囲が小さくても精度のよい応答結果となることを示した^{9),19),20)}。さらに、Convolutional PML について、有限要素法と整合し、かつ係数マトリックスが対称な定式化を行い、対象とする要素が非線形を示した際にも、精度よく適用可能であることを一次元の簡単な計算例を用いて示した。ただし、これらのモデルは速度比例型の減衰を考慮した定式化・解析モデルとなっていなかった(非線形モデルでの履歴減衰は考慮済み)。

そこで今回は、これらに速度比例型減衰を考慮するために新たに定式化を行う。これにより精度が向上するため、より実用的なモデルでの PML の有効性を示すことができると考えられる。また、境界条件として一般に良好な結果を示すと言われている、粘性境界に切り欠き力を考慮したモデルを PML モデルの比較対象とし、その比較においても PML は解析対象領域を小さくしても精度のよい結果を得られることを示す。なお、PML を用いたモデルは、3次元 FEM モデルにおいてより有限要素領域縮減効果があるが、本論文ではまず簡単な事例を用いての効果を目的としたため、2次元モデルを対象としている。

2. Convolutional PML の適用

2.1 Convolutional PML の定式化

ここでは、非線形挙動を示すモデルに対して適用可能な Convolutional PML に関して説明する。ただし PML および Convolutional PML の定式化に関しては、既往の研究^{19),20)}で示しているが、今回は数値積分法について新たに述べること、また以降の節で述べる速度減衰の導入に関しても定式化が以前と異なってくることから、あらためて記載するものとする。なお、地震入力の定式化は、既往発表のため省略する。

PML 内の座標 \tilde{x}_i は FEM 内の座標 x_i と式(1)で関連付けられる。

$$\tilde{x}_i = \int_0^{x_i} \lambda_i(s) ds \quad (1)$$

ここで、 x_i は座標の i 成分、 \tilde{x}_i はその変換後の成分、

λ_i は次式で表されるものとした。

通常の PML は、 $\omega=0$ で λ が無限大となる可能性がある。そこで、次のように座標変換係数を変え、 ω の実軸上の特異点をなくす。

$$\lambda_i = k_i + \frac{\beta_i}{\alpha_i + i\omega} \quad (2)$$

ここで、 k_i, β_i, α_i は x_i のみの関数とする。なお $k_i=1$ 、 $\sigma_i=0$ とおけば FEM の方程式となる。PML の運動方程式は、

$$-\omega^2 \rho \bar{u}_i = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \delta(\omega) \quad (3)$$

ここで ρ は密度、 x_j は座標の j 成分、 \bar{u}_i は変位の i 方向成分、 $\delta(\omega)$ はディラックのデルタ関数、 g_i は単位質量あたりの物体力である。ここでは静的平衡状態の変位も含んでいるので、物体力項が存在する。また、ひずみは以下のように書ける。

$$\bar{f}_{ij} = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{f}_{ij} + \bar{f}_{ji}) \quad (4)$$

ここではまず、2次元を考え式(3)の両辺に λ_1, λ_2 を乗じた次のような方程式を考える。

$$-\omega^2 \rho \lambda_1 \lambda_2 \bar{u}_i = \lambda_j \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \rho \lambda_1 \lambda_2 g_i \delta(\omega) \quad (5)$$

詳細に書くと、

$$\begin{aligned} & -\rho \omega^2 \left(k_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1 + i\omega} \right) \left(k_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2 + i\omega} \right) \bar{u}_i \\ & = \left(k_j + \frac{\beta_j}{\alpha_j + i\omega} \right) \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \\ & + \rho \left(k_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1 + i\omega} \right) \left(k_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2 + i\omega} \right) g_i \delta(\omega) \end{aligned} \quad (6)$$

書き直せば、

$$\begin{aligned} & -\rho \omega^2 \left\{ \begin{array}{l} k_1 k_2 + \frac{k_2 \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + i\omega)} \\ + \frac{k_1 \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) - \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \end{array} \right\} \bar{u}_i \\ & = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(k_j + \frac{\beta_j}{\alpha_j + i\omega} \right) \bar{\sigma}_{ij} \right\} \\ & + \rho \left\{ \begin{array}{l} k_1 k_2 + \frac{k_2 \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + i\omega)} \\ + \frac{k_1 \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) - \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \end{array} \right\} g_i \delta(\omega) \end{aligned} \quad (7)$$

これを展開し、重み関数 w_i を用いて弱形式の定式化を行う。重み関数が任意であることを用い形状関数を導入すれば、節点の変位を未知数とする離散化が行える。

$$\int_V -\rho \omega^2 w_i \left\{ \begin{array}{l} k_1 k_2 + \frac{k_2 \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + i\omega)} \\ + \frac{k_1 \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) - \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \end{array} \right\} \bar{u}_i dv$$

$$= \int w_i \left(k_{\neq} + \frac{\beta_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega} \right) \bar{\sigma}_{ij} n_j ds \quad (8)$$

$$- \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left(k_{\neq} + \frac{\beta_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega} \right) \bar{\sigma}_{ij} du$$

$$+ \int_V \rho w_i \left\{ \begin{array}{l} k_1 k_2 + \frac{k_2 \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + i\omega)} \\ + \frac{k_1 \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) - \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \end{array} \right\} g_i \delta(\omega) dv$$

フーリエ逆変換による時間領域に変換すると、

$$\int_V \rho w_i \left\{ k_1 k_2 \ddot{u}_i + \frac{k_{\neq} \beta_j (\alpha_{\neq} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\neq} - \alpha_j} e^{-\alpha_j t} * \ddot{u}_i \right\} dv$$

$$= \int w_i (k_{\neq} \sigma_{ij} + \beta_{\neq} e^{-\alpha_j t} * \sigma_{ij}) n_j ds$$

$$+ \int_V \rho w_i \left\{ k_1 k_2 g_i + \frac{k_{\neq} \beta_j (\alpha_{\neq} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\neq} - \alpha_j} e^{-\alpha_j t} * g_i \right\} dv \quad (9)$$

$$- \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} (k_{\neq} \sigma_{ij} + \beta_{\neq} e^{-\alpha_j t} * \sigma_{ij}) dv$$

ここで χ は j 以外の指数、 $*$ は畳み込み積分を意味する。同様に式(4)より、

$$k_j f_{ij} + \beta_j e^{-\alpha_j t} * f_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (10)$$

ところで、 $F(t)$ を任意関数として $e^{-\alpha} * f(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} f(t') dt' = F(t)$ とおけば、 $F(t+\Delta t)$ は次式のように近似できる。

$$F(t+\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha(t+\Delta t-t')} f(t') dt'$$

$$+ e^{-\alpha \Delta t} \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} f(t') dt'$$

$$= \theta \Delta t f(t+\Delta t) + e^{-\alpha \Delta t} F^*(t) \quad (11)$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq 1, F^*(t) = F(t) + (1-\theta) \Delta t f(t)$ である。

$$F^*(t+\Delta t) = f(t+\Delta t) \Delta t + e^{-\alpha \Delta t} F^*(t) \quad (12)$$

式(10)より、

$$(k_j + \beta_j \theta \Delta t) f_{ij}(t + \Delta t)$$

$$+ e^{-\alpha_j \Delta t} \beta_j F_{ij}^*(t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(t + \Delta t)$$

$$f_{ij}(t + \Delta t) = \frac{1}{k_j + \beta_j \theta \Delta t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(t + \Delta t)$$

$$- \frac{\beta_j e^{-\alpha_j \Delta t}}{k_j + \beta_j \theta \Delta t} F_{ij}^*(t) \quad (13)$$

$$F_{ij}^*(t) = \int_0^t e^{-\alpha_j(t-t')} f_{ij}(t') dt$$

$$+ (1-\theta) \Delta t f_{ij}(t)$$

式(9)より、

$$\int_V \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} \ddot{u}_i(t + \Delta t) dv$$

$$+ \int_V \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_{\neq} \beta_j (\alpha_{\neq} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\neq} - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} U_{ij}^*(t) \right\} dv$$

$$= \int w_i (k_{\neq} \sigma_{ij} + \beta_{\neq} e^{-\alpha_j t} * \sigma_{ij}) n_j ds$$

$$+ \int_V \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} g_i dv$$

$$+ \int_V \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_{\neq} \beta_j (\alpha_{\neq} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\neq} - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} G_i^* \right\} dv$$

$$- \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \{ (k_{\neq} + \theta \Delta t \beta_{\neq}) \sigma_{ij}(t + \Delta t) + \beta_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} \Delta t} \Sigma_{ij}^*(t) \} dv \quad (14)$$

ここで、

$$U_{ij}^*(t) = \int_0^t e^{-\alpha_j(t-t')} \ddot{u}_i(t') dt' + \Delta t (1-\theta) \ddot{u}_i(t)$$

$$G_{ij}^*(t) = \int_0^t e^{-\alpha_j(t-t')} g_i(t') dt' + \Delta t (1-\theta) g_i(t) \quad (15)$$

$$\Sigma_{ij}^*(t) = \int_0^t e^{-\alpha_j(t-t')} \sigma_{ij}(t') dt' + \Delta t (1-\theta) \sigma_{ij}(t)$$

したがって、

$$U_{ij}^*(t+\Delta t) = \Delta t \ddot{u}_i(t+\Delta t) + e^{-\alpha_j \Delta t} U_{ij}^*(t),$$

$$\Sigma_{ij}^*(t+\Delta t) = \Delta t \sigma_{ij}(t+\Delta t) + e^{-\alpha_j \Delta t} \Sigma_{ij}^*(t) \quad (16)$$

また

$$\Delta f_{ij} = f_{ij}(t + \Delta t) - f_{ij}(t)$$

$$= \frac{1}{k_j + \beta_j \theta \Delta t} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(t) \right)$$

$$- \frac{\beta_j e^{-\alpha_j \Delta t}}{k_j + \beta_j \theta \Delta t} F_{ij}^*(t) - f_{ij}(t)$$

$$= \frac{1}{k_j + \beta_j \theta \Delta t} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \left(\frac{1}{k_j + \beta_j \theta \Delta t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(t) - f_{ij}(t) \right)$$

$$- \frac{\beta_j e^{-\alpha_j \Delta t}}{k_j + \beta_j \theta \Delta t} F_{ij}^*(t) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{k_j + \beta_j \theta \Delta t} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j}$$

$$- \frac{\beta_j e^{-\alpha_j \Delta t}}{k_j + \beta_j \theta \Delta t} \left(\Delta t f_{ij}(t) - (1 - e^{-\alpha_j \Delta t}) F_{ij}^*(t - \Delta t) \right)$$

ここで

$$\begin{aligned} F_{ij}^*(t) &= \int_0^t e^{-\alpha_j(t-t')} f_{ij}(t') dt + (1-\theta)\Delta t f_{ij}(t) \\ F_{ij}^*(t+\Delta t) &= \Delta t f_{ij}(t) + e^{-\alpha_j \Delta t} F_{ij}^*(t) \\ \Delta u_i &= u_i(t+\Delta t) - u_i(t) \end{aligned} \quad (18)$$

(14)に代入すると,

$$\begin{aligned} & \int_V \rho w_i \left\{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \right\} \ddot{u}_i(t+\Delta t) dv \\ & + \int_V \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_+ \beta_j (\alpha_+ - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_+ - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} U_{ij}^*(t) \right\} dv \\ & = \int w_i (k_+ \sigma_{ij} + \beta_+ e^{-\alpha_+ t} * \sigma_{ij} n_j) ds \\ & + \int_V \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} g_i dv \\ & + \int_V \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_+ \beta_j (\alpha_+ - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_+ - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} G_{ij}^*(t) \right\} dv \\ & + \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left[\frac{(k_+ + \theta \Delta t \beta_+) \{ (\partial \sigma_{ij} / \partial f_{kl}) (\Delta f_{kl}) + \sigma_{ij}(t) \}}{\beta_+ e^{-\alpha_+ \Delta t} \Sigma_{ij}^*(t)} \right] dv \\ & = \int w_i (k_+ \sigma_{ij} + \beta_+ e^{-\alpha_+ t} * \sigma_{ij} n_j) ds \\ & + \int_V \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} g_i dv \\ & + \int_V \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_+ \beta_j (\alpha_+ - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_+ - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} G_{ij}^*(t) \right\} dv \\ & - \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left[\frac{DI (\partial \sigma_{ij} / \partial f_{kl})}{(k_+ + \theta \Delta t \beta_+) (k_i + \beta_i \theta \Delta t)} \right. \\ & \quad \left. \times \left\{ \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} - \beta_i e^{-\alpha_i \Delta t} \left(\frac{\Delta f_{kl}(t)}{-(1-e^{-\alpha_i \Delta t})} F_{kl}^*(t-\Delta t) \right) \right\} \right] \\ & \quad + (k_+ + \theta \Delta t \beta_+) \sigma_{ij}(t) + \beta_+ e^{-\alpha_+ \Delta t} \Sigma_{ij}^*(t) \Big] dv \end{aligned} \quad (19)$$

したがって

$$\begin{aligned} & \int_V \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} \ddot{u}_i(t+\Delta t) dv \\ & + \int \frac{DI (\partial \sigma_{ij} / \partial f_{kl})}{g'_j g'_i} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} dv \\ & = \int w_i (k_+ \sigma_{ij} + \beta_+ e^{-\alpha_+ t} * \sigma_{ij} n_j) ds \\ & + \int_V \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} g_i dv \\ & + \int_V \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_+ \beta_j (\alpha_+ - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_+ - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} G_{ij}^*(t) \right\} dv \\ & - \int_V \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_+ \beta_j (\alpha_+ - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_+ - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} U_{ij}^*(t) \right\} dv \\ & + \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left[\frac{DI (\partial \sigma_{ij} / \partial f_{kl})}{g'_j g'_i} \beta_i e^{-\alpha_i \Delta t} (F_{kl}^*(t) - F_{kl}^*(t-\Delta t)) \right] dv \end{aligned} \quad (20)$$

$$-(k_+ + \theta \Delta t \beta_+) \sigma_{ij}(t) - \beta_+ e^{-\alpha_+ \Delta t} \Sigma_{ij}^*(t) \Big] dv$$

ここで, $g'_j = k_j + \theta \Delta t \sigma_j$, $DI = g'_j g'_i$ である.

もし $(\partial \sigma_{ij} / \partial f_{kl})$ が (ij) と (kl) に関して対称であれば,

重み関数と変位に同一の形状関数を用いることにより, 離散化して得られる係数マトリックスは対称となる.

また, 時間領域で構成式を定めると, ひずみ履歴が与えられれば応力履歴が一意に決まり, 振動数領域での応力-ひずみ関係 (伝達関数) が求められる. その時間領域への逆変換の関係式は, 与えられたひずみ履歴がいかなるものであっても元の構成式で表されることから, 非線形弾性のみならず弾塑性に対しても成立する.

2.2 数値積分法

次に数値積分法に関して説明する. 数値積分として Newmark β 法を用いるとすれば,

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{u}_i &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i \\ \Delta \dot{u}_i &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{u}_i \end{aligned} \quad (21)$$

したがって

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{1}{\beta \Delta t^2} \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} \Delta u_i dv \\ & + \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{DI \cdot C_{ijkl}}{g'_j g'_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} dv \\ & = \int w_i (k_+ \sigma_{ij} + \beta_+ e^{-\alpha_+ t} * \sigma_{ij} n_j) ds \\ & + \int_V \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} g_i dv \\ & + \int_V \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_+ \beta_j (\alpha_+ - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_+ - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} G_{ij}^*(t) \right\} dv \\ & - \left(1 - \frac{1}{2\beta} \right) \int_V \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} \ddot{u}_i dv \\ & - \int_V \frac{1}{\beta \Delta t} \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} \dot{u}_i dv \\ & - \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{DI \cdot C_{ijkl}}{g'_j g'_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dv \\ & - \int_V \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_+ \beta_j (\alpha_+ - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_+ - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} U_{ij}^*(t) \right\} dv \\ & + \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{DI}{g'_j g'_i} C_{ijkl} e^{-\alpha_i \Delta t} \beta_i F_{kl}^* dv - \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \beta_+ e^{-\alpha_+ \Delta t} \Sigma_{ij}^*(t) dv \end{aligned} \quad (22)$$

となる.

2.3 速度比例減衰を考慮した定式化

減衰がある場合についても同様に定式化できる。ここでは、Rayleigh 減衰の場合について検討する。剛性比例分に関しては弾性剛性に比例するものとするれば、以下のように振動数領域において方程式が表わされる。

ここで、 k_i, β_i, α_i は x_i のみの関数とする。PML の運動方程式は、

$$-\omega^2 \rho \bar{u}_i + i\omega A \rho \bar{u}_i = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda_j} B C_{ijkl} \bar{f}_{kl} + \rho g_i \delta(\omega) \quad (23)$$

ここで、A, B は Rayleigh 減衰の定数であり、また

$$\bar{f}_{ij} = i\omega \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (24)$$

式(23)の両辺に λ_1, λ_2 を乗じ、整理すると、

$$\begin{aligned} & -\rho \left(k_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1 + i\omega} \right) \left(k_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2 + i\omega} \right) (\omega^2 + i\omega A) \bar{u}_i \\ & = \left(k_{\neq} + \frac{\beta_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega} \right) \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \\ & + \rho \left(k_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1 + i\omega} \right) \left(k_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2 + i\omega} \right) g_i \delta(\omega) \\ & + B \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left\{ C_{ijkl} \left(k_{\neq} + \frac{\beta_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega} \right) \right\} \bar{f}_{kl} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

書き直すと、

$$\begin{aligned} & -\rho \left\{ k_1 k_2 + \frac{k_2 \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + i\omega)} \right. \\ & \left. + \frac{k_1 \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) - \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \right\} (\omega^2 + i\omega A) \bar{u}_i \\ & = \left(k_{\neq} + \frac{\beta_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega} \right) \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \\ & + \rho \left(k_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1 + i\omega} \right) \left(k_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2 + i\omega} \right) g_i \delta(\omega) \\ & + B \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left\{ \left(k_{\neq} + \frac{\beta_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega} \right) C_{ijkl} \right\} \bar{f}_{kl} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

重み関数 w_i を用いて弱形式の定式化を行うと

$$\int_v -\rho \omega^2 w_i \left\{ k_1 k_2 + \frac{k_2 \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + i\omega)} + \frac{k_1 \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) - \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \right\} (\omega^2 + i\omega A) \bar{u}_i dv$$

$$\begin{aligned} & = \int_v w_i \left[\left(k_{\neq} + \frac{\beta_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega} \right) \bar{\sigma}_{ij} \right. \\ & \left. + B \left\{ \left(k_{\neq} + \frac{\beta_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega} \right) C_{ijkl} \right\} \bar{f}_{kl} \right] n_j ds \\ & + \int_v w_i \left\{ k_1 k_2 + \frac{k_2 \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + i\omega)} \right. \\ & \left. + \frac{k_1 \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) - \beta_1 \beta_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \right\} g_i \delta(\omega) dv \\ & - \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left[\left(k_{\neq} + \frac{\beta_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega} \right) \bar{\sigma}_{ij} \right. \\ & \left. + B \left\{ \left(k_{\neq} + \frac{\beta_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega} \right) C_{ijkl} \right\} \bar{f}_{kl} \right] du \end{aligned} \quad (27)$$

式(24)をフーリエ逆変換により時間領域に変換すると

$$k_j \dot{f}_{ij} + \beta_j e^{-\alpha_j t} * f_{ij} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \quad (28)$$

同様に

$$\begin{aligned} & \int_v \rho w_i \left\{ k_1 k_2 \ddot{u}_i \right. \\ & \left. + \frac{k_{\neq} \beta_j (\alpha_{\neq} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\neq} - \alpha_j} e^{-\alpha_j t} * (\ddot{u}_i + A \dot{u}_i) \right\} dv \\ & = \int w_i \left\{ k_{\neq} \sigma_{ij} + \beta_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} t} * \sigma_{ij} \right. \\ & \left. + B k_{\neq} C_{ijkl} \bar{f}_{kl} + B \beta_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} t} * (C_{ijkl} \bar{f}_{kl}) \right\} n_j ds \\ & + \int_v \rho w_i \left\{ k_1 k_2 g_i \right. \\ & \left. + \frac{k_{\neq} \beta_j (\alpha_{\neq} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\neq} - \alpha_j} e^{-\alpha_j t} * g_i \right\} dv \\ & - \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left\{ k_{\neq} \sigma_{ij} + \beta_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} t} * \sigma_{ij} \right. \\ & \left. + B k_{\neq} C_{ijkl} \bar{f}_{kl} + B \beta_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} t} * (C_{ijkl} \bar{f}_{kl}) \right\} dv \end{aligned} \quad (29)$$

積分近似を用いれば

$$\begin{aligned} \dot{f}_{ij}(t + \Delta t) & = \frac{1}{k_j + \theta \Delta t} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\beta_j e^{-\alpha_j t}}{k_j + \theta \Delta t} F_{ij}(t) \\ \int_v \rho w_i \left\{ k_1 k_2 \right. \\ & \left. + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \right\} \ddot{u}_i(t + \Delta t) dv \\ & + \int_v \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_{\neq} \beta_j (\alpha_{\neq} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\neq} - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} U_{ij}^*(t) \right\} dv \\ & + A \int_v \rho w_i \left\{ k_1 k_2 \right. \\ & \left. + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \right\} \ddot{u}_i(t + \Delta t) dv \\ & + A \int_v \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_{\neq} \beta_j (\alpha_{\neq} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\neq} - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} \tilde{U}_{ij}^*(t) \right\} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int w_i \left\{ k_{\pm} \sigma_{ij} + \beta_{\pm} e^{-\alpha_{\pm} t} * \sigma_{ij} \right. \\
&\quad \left. + B k_{\pm} C_{ijkl} \dot{f}_{kl} + B \beta_{\pm} e^{-\alpha_{\pm} t} * (C_{ijkl} \dot{f}) \right\} ds \\
&\int_{\nu} \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} g_i dv \\
&+ \int_{\nu} \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_{\pm} \beta_j (\alpha_{\pm} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\pm} - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} G_{ij}^*(t) \right\} dv \\
&- \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left\{ (k_{\pm} + \theta \Delta t \beta_{\pm}) \sigma_{ij}(t + \Delta t) + \beta_{\pm} e^{-\alpha_{\pm} \Delta t} \Sigma_{ij}^*(t) \right\} dv \\
&- B \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left\{ \frac{DI}{g'_j g'_i} C_{ijkl} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_l} - \frac{DI \beta_i e^{-\alpha_i t}}{g'_j g'_i} C_{ijkl} \tilde{F}_{kl}(t) \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{\pm} e^{-\alpha_{\pm} \Delta t} \tilde{\Sigma}_{ij}(t) \right\} dv \\
&\tilde{U}_{ij}^*(t) = \int_0^t e^{-\alpha_j(t-t')} \dot{u}_i(t') dt' + \Delta t (1 - \theta) \dot{u}_i(t), \\
&\tilde{F}_{kl}(t) = \int_0^t e^{-\alpha_j(t-t')} \dot{f}_{kl}(t') dt' + \Delta t (1 - \theta) \dot{f}_{kl}(t) \quad (30) \\
&\tilde{\Sigma}_{kl}(t) = \int_0^t e^{-\alpha_j(t-t')} \tilde{\sigma}_{kl}(t') dt' + \Delta t (1 - \theta) \tilde{\Sigma}_{kl}(t) \\
&\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{f}_{kl}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\int_{\nu} \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} \ddot{u}_i(t + \Delta t) dv \\
&+ A \int_{\nu} \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} \dot{u}_i(t + \Delta t) dv \\
&+ B \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{DI}{g'_j g'_i} C_{ijkl} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_l} dv \\
&+ \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{DI (\partial \sigma_{ij} / \partial f_{kl})}{g'_j g'_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_l} dv \\
&= \int w_i (k_{\pm} \sigma_{ij} + \beta_{\pm} e^{-\alpha_{\pm} t} * \sigma_{ij} n_j) ds \\
&+ \int_{\nu} \rho w_i \{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \beta_1 + k_1 \beta_2) \} g_i(t + \Delta t) dv \\
&+ \int_{\nu} \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_{\pm} \beta_j (\alpha_{\pm} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\pm} - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} G_{ij}^*(t) \right\} dv \\
&- \int_{\nu} \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_{\pm} \beta_j (\alpha_{\pm} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\pm} - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} U_{ij}^*(t) \right\} dv \\
&- A \int_{\nu} \rho w_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_{\pm} \beta_j (\alpha_{\pm} - \alpha_j) + \beta_1 \beta_2}{\alpha_{\pm} - \alpha_j} e^{-\alpha_j \Delta t} \tilde{U}_{ij}^*(t) \right\} dv \\
&+ \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left[\frac{DI (\partial \sigma_{ij} / \partial f_{kl})}{g'_j g'_i} \beta_i e^{-\alpha_i \Delta t} (F_{kl}^*(t) - F_{kl}^*(t - \Delta t)) \right. \\
&\quad \left. - (k_{\pm} + \theta \Delta t \beta_{\pm}) \sigma_{ij}(t) - \beta_{\pm} e^{-\alpha_{\pm} \Delta t} \Sigma_{ij}^*(t) \right] dv \\
&+ B \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left\{ \frac{DI \beta_i e^{-\alpha_i t}}{g'_j g'_i} C_{ijkl} \tilde{F}_{kl}(t) - \beta_{\pm} e^{-\alpha_{\pm} \Delta t} \tilde{\Sigma}_{ij}(t) \right\} dv \quad (31)
\end{aligned}$$

2.4 弾塑性について

降伏関数 f , 塑性ポテンシャル g として, 弾塑性の応力

増分 $d\sigma_{ij}$ —ひずみ増分 $d\varepsilon_{mn}$ 関係は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
d\sigma_{ij} &= C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \\
&= C_{ijkl} (\delta_{km} \delta_{ln} - B_{klmn}) d\varepsilon_{mn} \quad (32)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
B_{klmn} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqmn} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} / \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \\
C_{ijkl} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + 2 \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (33)
\end{aligned}$$

であり, E, ν はヤング係数とポアソン比である.

今回, 降伏条件としては次の Mohr-Coulomb 式を用いた.

$$\begin{aligned}
f(I_1, J_2, J_3) &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 3(1 - \sin \phi) \sin \theta \\ + \sqrt{3} (3 + \sin \phi) \cos \theta \end{array} \right\} \sqrt{J_2} \\
&- I_1 \sin \phi - 3c \cos \phi = 0 \quad (34)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-3\sqrt{3}/2 \cdot J_3/J_2^{3/2} \right) \quad (0 < \theta < \pi/3) \quad (35)$$

なお, J_2, J_3 は偏差応力の第 2, 第 3 不変量, I_1 は応力

の第 1 不変量, c は粘着力, ϕ は内部摩擦角である.

また, 塑性ポテンシャルとしては次の Drucker-Prager 式を用いた.

$$\Phi(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 \quad (\alpha > 0)$$

$$\alpha = \tan \psi / \sqrt{9 + 12 \tan^2 \psi} \quad (36)$$

ψ は平面ひずみ状態における土のダイレイタンシー角である.

3. 粘性境界における切り欠き力について

次に今回 PML との解析比較に用いる粘性境界において, よく考慮される切り欠き力に関して簡単に説明する. 市販の解析コード (例えば TDAPⅢ²¹⁾) には側方粘性境界を設定した際に切り欠き力が考慮されるようになっており, これによって解析精度が向上する.

切り欠き力について, 時間領域では

$$\begin{aligned}
& \int_V \rho w_i \ddot{u}_i dv + A \int_V \rho w_i \dot{u}_i dv \\
& + B \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} C_{ijkl} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_l} dv + \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} C_{ijkl} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} dv \\
& = \int w_i n_j C_{ijkl} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} ds + B \int w_i n_j C_{ijkl} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_l} ds \quad (37)
\end{aligned}$$

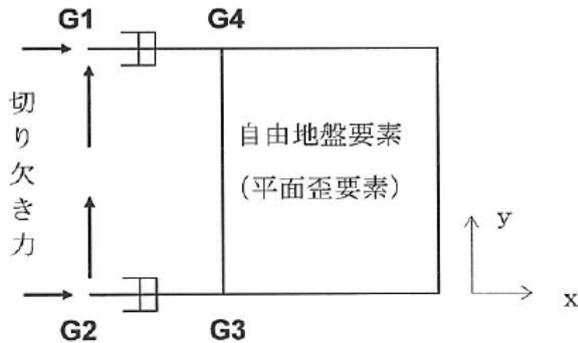


図-1 切り欠き力概念図²¹⁾

形状関数を用いて離散化すれば、左辺はそれぞれ要素質量、減衰、剛性マトリックスと節点の加速度、速度、変位ベクトルの積で表わされ、右辺が外部に作用する力ベクトルとなる。図-1 に概念図を示す。G1, G2 は FEM 領域の節点, G3, G4 は自由地盤の節点をそれぞれ示す。自由地盤との境界が鉛直 (図の y 方向) とすれば、自由地盤からの力 (切り欠き力) は鉛直面に作用する力のみを考えればよく、自由地盤内では水平方向に変位が同一であるので、変位の x に関する微分は 0 となるので、自由地盤の鉛直方向変位分布等から求められる。減衰のない場合は変位のみから求められるが、減衰がある場合 (剛性比例項) 速度にも関連する。自由地盤の剛性や質量を大きくとれば、自由地盤から及ぼす力の反作用が自由地盤に与える効果が十分無視できるので、図の点線のように自由地盤と FEM 領域を結合する要素を考え、自由地盤側から FEM に加える力を自由地盤の変位等から正しく与える係数マトリックスを求めて、FEM 側から自由地盤に与える力を表現する係数マトリックスはその転置と考える事により、結合要素の対称化されたマトリックスが得られる。

4. 解析事例

4.1 地盤モデル

図-2 に解析モデルを示す。なお今回の検討は、無次元で行うものとする。物性値として、密度 1, 粘着力 50, ラメ定数はともに 12.5, 内部摩擦角, ダイレタンシー角はともに 1.5, x を PML と FEM の境界からの距離として、

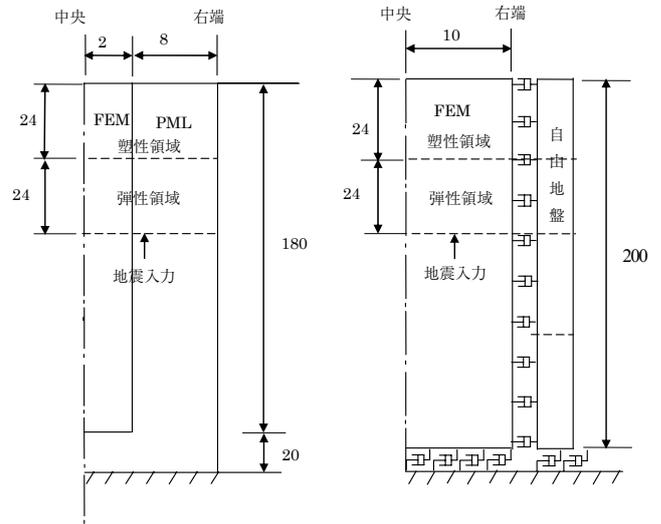


図-2 解析モデル

$$\alpha_1 = \frac{x}{L_p} \alpha_{MAX}, \quad \sigma_1 = \frac{x}{L_p} \sigma_{MAX}, \quad \kappa_1 = 1 + \frac{x}{L_p} \kappa_{MAX},$$

$$\alpha_{MAX} = 0.2, \quad \sigma_{MAX} = 100, \quad \kappa_{MAX} = 10 \text{ とした。}$$

Rayleigh 減衰は $\beta=0.01$ である。角振動数 1 の Ricker-wavelet を入力した場合の、地表や地盤中の変位応答を図-3, 図-4 に示す。なお、ここでの変位は、静的変位からの相対変位を示している。次元については、横軸は Dimensionless time, 縦軸は Dimensionless displacement である。図に示している、例えば G-20 という表記は、中央の位置で、地表から 20m 下の地盤の応答を示している。両者の結果を比較すると、一般に精度がよいとされている粘性境界に切り欠き力を考慮した結果の応答が乱れている。本来であれば、図-3 に示すように塑性化した地盤の表層では、残留変位が残っているものであるが、図-4 の応答はそのようになっていない。これは、モデル化した地盤が塑性応答を示しているにも関わらず、切り欠き力が弾性応答とみなして働いてしまうためであると考えられる。そこで、次にこの切り欠き力を取り除いて、粘性境界のみとした場合の結果と比較してみることとする。

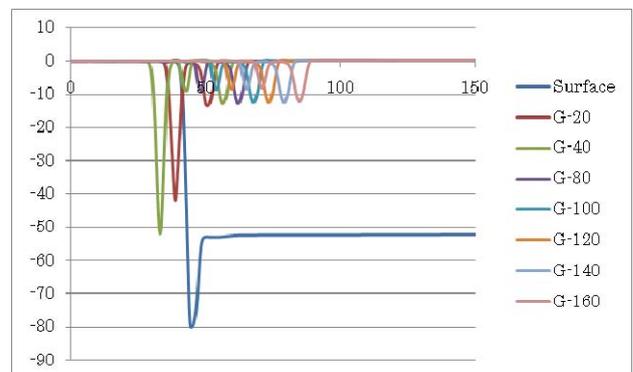


図-3 地盤の応答変位 (Convolutional PML)

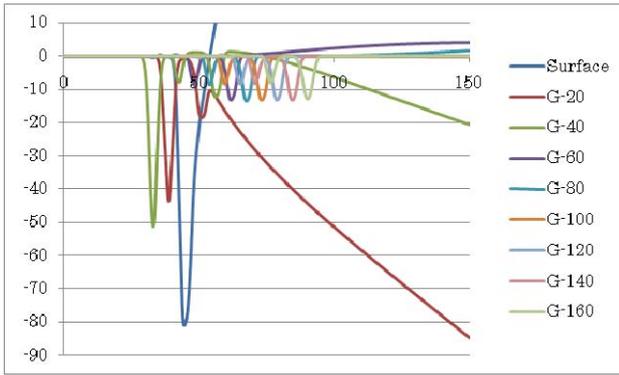


図-4 地盤の応答変位 (粘性境界+切り欠き力)

図-5と図-6に検討結果を示す。ここでは、地表での地盤応答を取り出し、中央での応答と自由地盤での応答を比較するものとする。図のように切り欠き力を考慮しないモデルでは、中央の応答に残留変位が見られるようになるが、自由地盤の応答とは一致しないため、これも解析の精度がよいとは言えない。これらの結果より、非線形解析においてはConvolutional PMLが有効であることが示された。

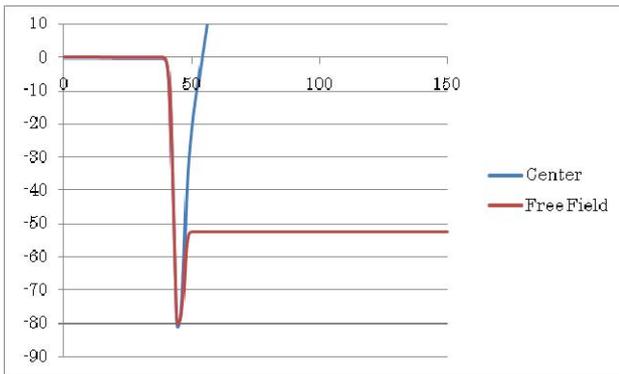


図-5 地盤の応答変位 (切り欠き力考慮)

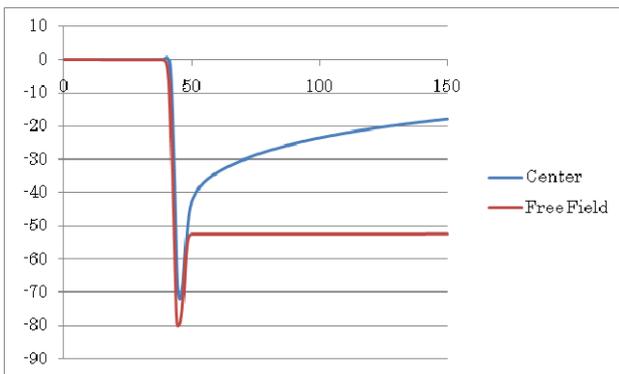


図-6 地盤の応答変位 (切り欠き力非考慮)

4.2 橋脚モデル

ここでは橋脚をモデルとし、地盤-構造物系の非線形応答におけるPMLの有効性を示す。解析モデルを図-7に示す。杭長が23.7mの杭基礎橋脚の直角方向を解析対象とする。なお、今回は簡単のため、支承のモデル化を省略している。図-8に全体系モデルを示す。橋脚に関しては上部工と橋脚部にそれぞれ集中質量を持たせた2質点モデルとした。上部工の質量は73,900kg、橋脚は15,150kgである。その他の橋脚に関する物性値は、表-1に示す。地盤モデルは図-8にあるように4層のモデルとしている。物性値を表-2に示す¹⁹⁾。入力波形は、図-8に示すように深度46.9mの位置から上方向に入射させる。

今回の検討では、地盤領域が大きいもの (large modelとする) と小さいもの (small modelとする) を比較することで、地盤領域のモデル化の違いが解析結果に影響を及ぼすかを検討するものとする。なお、今回の境界条件としては、PMLと粘性境界+切り欠き力の2種類を検討する。

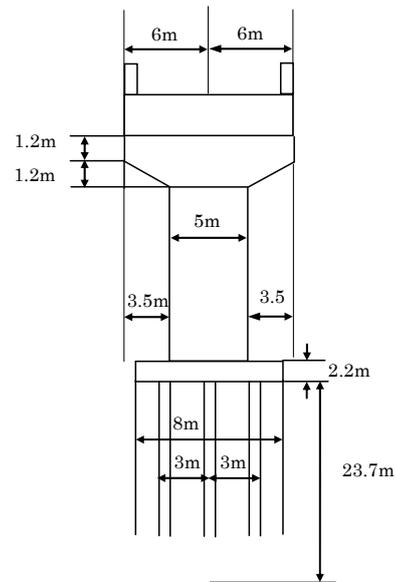


図-7 橋脚モデル

表-1 橋脚の構造諸元

	断面2次モーメント (m ⁴)	断面積 (m ²)	密度 (kg/m ³)	ヤング係数 (N/m ²)
上部工	37.3	3.12	2300	2.00E+10
橋脚	2.70	1.294	2300	2.00E+10
杭	0.0359	0.399	2300	2.00E+10

表-2 地盤の物性値

	Vs	N値	粘着力c (kgf/cm ²)	内部摩擦角φ (°)	ダイレタンシー角ψ (°)
地盤(1層) GL=0.00(m)~-3.70(m)	140	5	8.75	0	0
地盤(2層) GL=-3.70(m)~-6.90(m)	210	18	13.1	0	0
地盤(3層) GL=-6.90(m)~-14.60(m)	350	30	0	36.2	36.2
地盤(4層) GL=-14.60(m)~-46.45(m)	490	50	0	42.4	42.4

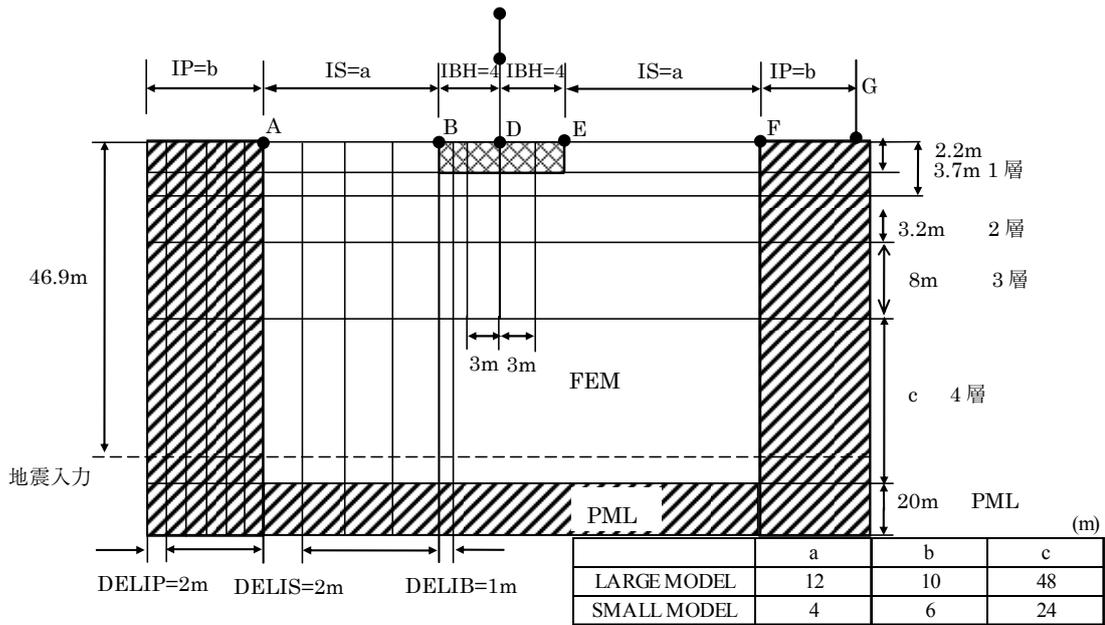


図-8 全体モデル

図-8 に示すように、large model と small model では、具体的に 3 箇所距離 (IS, IP, および 4 層) が異なる。

入力波形は、地上で卓越周期 0.2 秒の Ricker wavelet となるような波形を考えて、これを深度 46.9m まで 1 次元地盤モデル中を引き戻し、得られた波形をその位置で上方向へ入射した。ここでは Ricker wavelet を速度波形として入力している。

なお今回の検討も、無次元で行うものとする。物性値として表-1、表-2 のほかに、ラメ定数はともに 12.5、Rayleigh 減衰は $\beta=0.01$ である。応答結果の次元については、横軸は Dimensionless time、縦軸は Dimensionless displacement である。

図-9～図-12 に解析結果を示す。Ricker wavelet を速度波形として入力しているため、応答変位は両振幅の一階積分形状となっている。Top は橋脚天端の応答、Bottom は橋脚下端 (図中の節点 D)、Base Edge は図中の B、そして Free Field は図中の G を示す。

図-9、図-10 は PML の応答を示している。large model でも small model においても結果はほぼ等しく、地盤領域を小さくすることの影響が少ないと言える。次に、図-11、図-12 には粘性境界と切り欠き力を考慮したモデルを示す。両者の結果が異なっているのは明らかであり、地盤のモデル化領域の影響を受けていると考えられる。

なお、地盤を線形でモデル化したものについても解析を行い、PML と粘性境界+切り欠き力、またそれぞれの large model, small model の 4 ケースを比較したところ、全ての応答結果が一致していることを確認している。したがってモデル化手法における結果の違いではなく、地盤の非線形性と境界条件によるものと結論付けられる。

5. 結論

FEM 解析は、側方・底面境界で発生する反射波の影響により応答の精度が低下することを防ぐため、地盤のモデル化に大規模な領域が必要であり、結果として多量の計算量を必要とする。そこで本研究では、理想的な境界と考えられる PML において、速度比例型減衰を考慮した、有限要素法に整合して変数非分離型の陰解法で係数マトリックスが対称となる定式化を行った。また非線形応答を行う 2 次元の解析モデルに対しても、Convolutional PML が適用できることを示し、粘性境界に切り欠き力を考慮した側方境界よりも解析精度のよいことが示された。

以上より得られた知見を以下に示す。

- ・時間領域に適用可能な Convolutional PML を有限要素法に適合し、係数マトリックスが対称となる定式化を行った。また数値積分法に関しても定式化を行った。
- ・定式化においては、新たに速度比例型の減衰を考慮し、解析を行う上での実用性を向上させた。
- ・粘性境界に切り欠き力を考慮したモデルと PML による応答精度の比較を行った。既往の研究から、線形挙動においては粘性境界に切り欠き力を考慮したモデルも Convolutional PML と同様に精度の良いことが示されていたが、非線形応答を示す場合では特に Convolutional PML が精度の良いことを示した。
- ・非線形動的相互作用を考慮した地盤-構造物系の非線形応答においても Convolutional PML の有効性を示した。

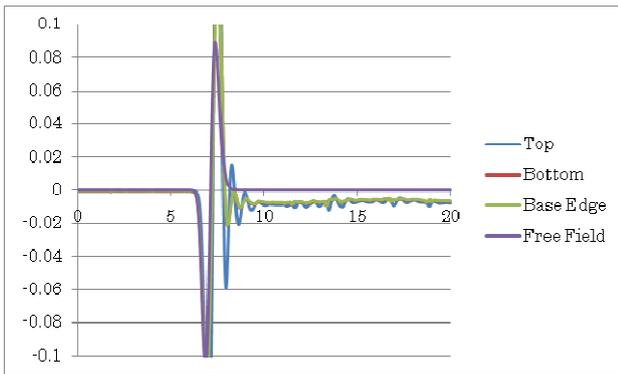


図-9 応答変位結果 (PML: large model)

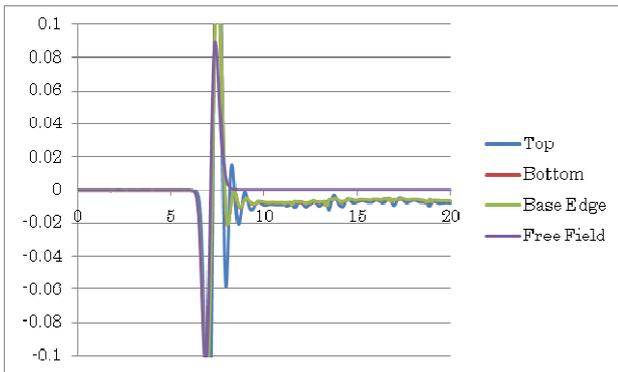


図-10 応答変位結果 (PML: small model)

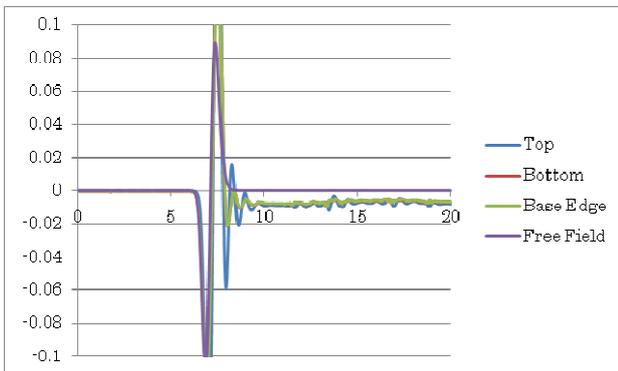


図-11 応答変位結果 (粘性+切り欠き力: large model)

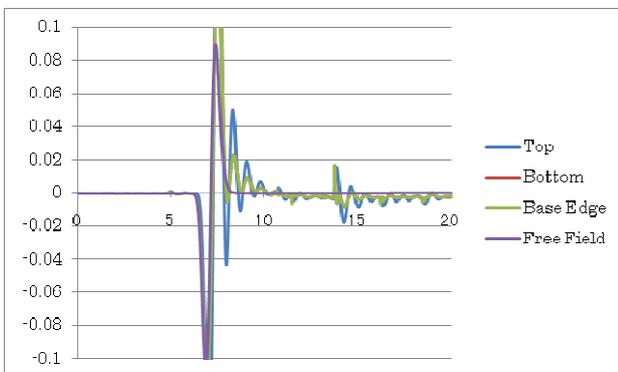


図-12 応答変位結果 (粘性+切り欠き力: small model)

謝辞

本研究は、平成16年度文部科学省学術フロンティア推進事業（日本大学理工学部：継続）「環境・防災都市に関する研究」（研究代表者：石丸辰治）の一環として実施したものである。

参考文献

- 1) (社)日本道路協会：道路橋示方書・同解説 V 耐震設計編，2002.3
- 2) (社)日本港湾協会：港湾の施設の技術上の基準・同解説，2007.
- 3) 宇野州彦，塩尻弘雄，川口和広，仲村成貴，中原知洋，大島貴充：解析手法や境界条件等の違いが地盤-基礎-上部構造物からなる系の動的挙動に与える影響評価，第29回地震工学研究発表会講演論文集，pp.1151-1158，2007.6
- 4) 小倉裕介，岡田太賀雄，西田秀明，運上茂樹：相互作用を考慮した基礎地盤バネの減衰定数に関する考察，第28回地震工学研究発表会講演論文集，pp.1-7，2005.2
- 5) 土岐憲三，清野純史，小野祐輔，古川愛子：杭基礎-地盤系における非弾性挙動を考慮した相互作用ばねのモデル化について，土木学会論文集，No.710/I-60，pp.235-245，2002.7
- 6) 齋藤正人，池亀真樹，棚村史郎，渡邊啓行：複合する非線形条件下における大型基礎の周波数応答特性に関する実験的研究，土木学会論文集，No.759/I-67，pp.131-142，2004.4
- 7) 木村至伸，河野健二：非線形性を有する地盤-構造物系の地震応答解析に関する基礎的研究，構造工学論文集，Vol.47A，pp.599-606，2001.3
- 8) 原田隆典，山下典彦，坂梨和彦：地盤との動的相互作用を考慮した道路橋橋脚の周期と減衰定数に関する理論的研究，土木学会論文集，No.489/I-27，pp.227-234，1994.4
- 9) Kunihiko Uno, Hiroo Shiojiri, Kazuhiro Kawaguchi and Masataka Nakamura: Analytical Method, Modeling and Boundary Condition for the Response Analysis with Nonlinear Soil-Structure Interaction, The 14th World Conference on Earthquake Engineering, No.14-0156, 2008.10
- 10) J. P. Berenger: A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, *Journal of Computational Physics*, **114**, pp.185-200, 1994.
- 11) 宇野野亨：FDTD法による電磁界およびアンテナ解析，コロナ社，1998.
- 12) Festa, G. and Nielsen, S.: "PML absorbing Boundaries", *Bulletin of Seismological Society of America*, Vol.93, No.2, pp.891-903, 2003
- 13) Basu U, Chopra A. K.: "Perfectly matched layers for time harmonic elastodynamics of unbounded domains.", *Computational Methods in Applied Mechanics and*

- Engineering*, Vol.192, pp.1337-1375, 2003.
- 14) Basu U, Chopra A. K : "Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains.", *International Journal for Numerical methods in Engineering* 2004; Vol59, No8, pp.1039-1074, 2004.
 - 15) Basu, U. : Perfectly Matched Layers for Acoustic and Elastic Waves : Theory, Finite-Element Implementation and Application to Earthquake Analysis of Dam-Water Foundation Rock System, *A dissertation*, University of California, Berkeley, 2004.
 - 16) J. Alan Roden, Stephen D. Gedney : Covolutional PML (CPML): An Efficient FDTD Implementation of the CFS-PML for Arbitrary Media, *Microwave and Optical Technology Letters*, pp.1-18, June 2000.
 - 17) Drossaert, F.H. and Giannopoulos, A. : Complex frequency shifted convolution PML for FDTD modeling of elastic waves, *Wave Motion*, 1.44:8, pp.593-604
 - 18) 藤井大地, 植月徳仁, 鈴木克幸, 大坪英臣 : ボクセル有限要素法とPML境界を用いた超音波波動伝播解析, *Transactions of JSCES*, No.20010015, p.8, 2001.
 - 19) 宇野州彦, 塩尻弘雄 : 有限要素法を用いた地震応答解析における地盤境界条件へのPMLの適用, *応用力学論文集*, Vol.12, pp.631-641, 2009.8
 - 20) 宇野州彦, 塩尻弘雄 : 地盤の境界条件や解析手法が非線形動的相互作用を考慮した構造物の地震時挙動に与える影響, *地震工学論文集*, Vol.30, pp.222-235, 2009.12
 - 21) TDAPⅢ バッチ版 使用手引書 Ver.3.02, (株)アーケ情報システム, 2010.4
 - 22) 地盤工学会 : 地盤の変形解析 基礎理論から応用まで (39), 2002.7

(2010年3月9日 受付)