

## 有限要素法を用いた地震応答解析における地盤境界条件へのPMLの適用

Investigation for applicability of PML in boundary condition of ground in FEM analysis

宇野 州彦\*・塩尻 弘雄\*\*  
Kunihiko Uno and Hiroo Shiojiri\*修(工)九州大学大学院 工学府建設システム工学専攻 博士後期課程  
(五洋建設株) 土木部門土木本部土木設計部(〒112-8576 東京都文京区後楽2-2-8)

\*\*工博 日本大学教授 理工学部土木工学科(〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台1-8)

As the structural design has shifted to the performance design, seismic response analyses considering soil-structure interaction become more prevailing. Soil-structure interaction and structure-water interaction have significant effect on the dynamic responses of structures. In this paper, a time domain implicit PML for structure-water-foundation soil system is developed for FEM analysis to absorb outgoing waves at the artificial boundaries of numerical models. Symmetric coefficient matrices are derived not only for PML but also for convolutional PML to be consistent with most of FEM codes. The high performances of the proposed procedures for linear and nonlinear models subjected to seismic loading are demonstrated by numerical examples.

**Key Words:** dynamic interaction, PML, Convolutional PML, water-foundation interaction  
キーワード: 動的相互作用, Perfectly Matched Layer, 畳み込みPML,  
貯水と岩盤の相互作用

## 1. はじめに

1995年に発生した兵庫県南部地震では、橋梁や地中構造物、港湾施設やライフライン施設等の土木構造物に激甚な被害をもたらした。その後の耐震設計法に多大な影響を及ぼした。耐震設計法においては、「道路橋示方書・同解説」<sup>1)</sup>や「港湾の施設の技術上の基準・同解説」<sup>2)</sup>等に見られるように、構造物ごとの目標性能を設定し、これを満足するように設計する性能設計法へと移行しつつある。また近い将来、東海地震、南海地震、東南海地震、南関東地震や、首都圏直下型地震等も発生が懸念されており、性能設計法への期待と、耐震設計レベルのさらなる高度化が要求されている。

構造物の耐震設計においては、動的解析が主流となってきており、また解析においても、地盤条件等を適切に考慮した上で構造物の応答を評価しなければならない<sup>3)</sup>。近年では、コンピュータ技術の発展と、先に述べた性能設計法に伴う変形解析のニーズの高まりから、地盤-構造物系の動的解析を行う機会が増えている。しかしながら、このようなFEM解析は、側方・底面境界で発生する反射波の影響により応答の精度が低下することを防ぐため、地盤のモデル化に大規模な領域が必要であり、結果として多量の計算量を必要とする。これはコンピュータ能力の向上により、一部は対応可能な面もあるが、ソフトウェアの面でも計算

量低減のアルゴリズム開発を行う必要がある。

近年、周波数領域での解析のみならず、時間領域での解析においても、高い性能で反射波を吸収するPML(Perfectly Matched Layer)<sup>4)-10)</sup>境界が提案されている。PMLは人工的に設定した層であり、インピーダンスを解析対象領域と等しく、かつ内部の波動を減衰させる働きを持たせる。

PMLを用いた数値解法では、FDTD法等の差分法での適用は進んでいる<sup>4)-6)</sup>。しかし構造物の耐震解析等は、有限要素法を使って行われるのが大部分であり、有限要素法に適用できるものが好ましい。Basuら<sup>7)-9)</sup>は、変数非分離型の陰解法での有限要素法への適用も行っている。ただし、Basuらの定式化では、周波数領域解析では係数マトリックスは対称となるが<sup>7)</sup>、時間領域解析では非対称となる<sup>8),9)</sup>。通常の有限要素法の解析コードは、係数マトリックスが対称であることを利用して解いているものが多く、広く用いられるためには対称であることが望まれる。また、通常のPMLの座標変換係数を変えることにより、精度の向上と非線形問題までへの適用の可能性拡大も考えられるとし、それを効率的な解法を用いて解こうとするConvolutional PML<sup>10)</sup>についても、FEMに適合した定式化と、係数マトリックスの対称化が望まれる。

ここでは、まず固体の有限要素法に適合する対称な係数のPMLの定式化、およびPMLを有する数値モデルに対する地震波入力方式の定式化を行い、具体例を挙げて地盤

領域のモデル化範囲が小さくても精度のよい応答結果となることを示す。次に、解析事例としてダムを取り上げ、ダムの地震時挙動に大きな影響を及ぼす貯水池・岩盤との相互作用を考慮した検討を示す。Basu ら<sup>9)</sup>は、PML 領域での貯水と岩盤の相互作用は考慮していないが、ここでは、流体と固体との相互作用部についても有限要素法と整合する PML の定式化を行い、簡単な数値例で有効性を示す。

さらに、Convolutional PML について、有限要素法と整合し、かつ係数マトリックスが対称な定式化を行い、対象とする要素が非線形を示した際にも、精度よく適用可能であることを簡単な計算例を用いて示す。

## 2. PML の定式化

### 2.1 固体要素の定式化

ここでは PML 領域では材料非線形は発生しないものとする。PML 内の座標  $\tilde{x}_i$  は FEM 内の座標  $x_i$  と式(1)で関連付けられる<sup>6)-8)</sup>。

$$\tilde{x}_i = \int_0^{x_i} \lambda_i(s) ds \quad (1)$$

ここで、 $x_i$  は座標の  $i$  成分、 $\tilde{x}_i$  はその変換後の成分、 $\lambda_i$  は次式で表されるものとした<sup>6),7)</sup>。簡単のため  $x_i$  は全体座標系と一致しているものとする。

$$\lambda_i(s) = 1 + f_i^e(s) + \frac{c_s}{i\omega b} f_i^p(s) \quad (2)$$

ただし  $i$  は虚数単位、 $c_s$  はせん断波速度、 $b$  は代表長さ、 $\omega$  は角振動数、 $f_i^e$ 、 $f_i^p$  は非負な無次元連続関数で、有限要素部との境界で 0 となる。

2次元の場合、面内の振動数領域の動的つり合い式は次式であらわされる。なお、特に断らない限り総和規約を用いるものとする。

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = -\omega^2 \rho \bar{u}_i \quad (3)$$

また、2次元の振動数領域の応力 - ひずみ関係は、速度比例の減衰定数  $\zeta$  を用いて次式で表わされるものとする。

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left( \bar{\varepsilon}_{kl} + i\omega \frac{2\zeta b}{c} \bar{\varepsilon}_{kl} \right) \quad (4)$$

振動数領域のひずみ - 変位関係式は次式が表わされる。

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

これらの関係式が  $\tilde{x}_i$  に対して成立するものとして  $x_i$  に

対する方程式に変換する。すなわち、 $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$  の関係

式を用いて変換する(この式の右辺に関しては総和規約を用いない)。両辺に  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  を乗じて、式(1)は次式のよう

に表される<sup>7),8)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \left\{ 1 + f_{\tilde{x}}^e(x_{\tilde{x}}) + \frac{c_s}{i\omega b} f_{\tilde{x}}^p(x_{\tilde{x}}) \right\} = \\ -\omega^2 \rho \left\{ 1 + f_1^e(x_1) \right\} \left\{ 1 + f_2^e(x_2) \right\} \bar{u}_i \\ + i\omega \rho \frac{c_s}{b} \left[ \left\{ 1 + f_1^e(x_1) \right\} f_2^p(x_2) + \left\{ 1 + f_2^e(x_2) \right\} f_1^p(x_1) \right] \bar{u}_i \\ + \rho \left( \frac{c_s}{b} \right)^2 f_1^p(x_1) f_2^p(x_2) \bar{u}_i \end{aligned} \quad (6)$$

応力 - ひずみ関係は変数変換によってかわらないが、振動数領域のひずみ - 変位関係式は、やはり両辺に  $\lambda_i$ 、 $\lambda_j$  を乗じて次式が表わされる(ここでは総和規約を用いない)。

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + f_i^e(x_i) \right\} \left\{ 1 + f_j^e(x_j) \right\} \bar{\varepsilon}_{ij} \\ + \frac{c_s}{i\omega b} \left[ \left\{ 1 + f_i^e(x_i) \right\} f_j^p(x_j) + \left\{ 1 + f_j^e(x_j) \right\} f_i^p(x_i) \right] \bar{\varepsilon}_{ij} \\ - \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{c_s}{b} \right)^2 f_i^p(x_i) f_j^p(x_j) \bar{\varepsilon}_{ij} \\ = \frac{1}{2} \left[ \left\{ 1 + f_i^e(x_i) \right\} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \left\{ 1 + f_j^e(x_j) \right\} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \\ + \frac{c_s}{2i\omega b} \left\{ f_i^p(x_i) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + f_j^p(x_j) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\bar{\sigma}_{ij}$ 、 $\bar{u}_j$ 、 $\bar{\varepsilon}_{ij}$  はそれぞれ、応力、変位、ひずみの各成分  $\sigma_{ij}$ 、 $u_j$ 、 $\varepsilon_{ij}$  のフーリエ変換値、 $\tilde{x}$  は  $j$  と異なる成分、 $C_{ijkl}$  は弾性マトリックス成分を表す。これを時間領域にフーリエ逆変換すれば時間領域の式となる<sup>8),9)</sup>。

今回、時間領域の対称な定式化を導く。 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 、 $f(t)$  を任意関数、 $\gamma$ 、 $\beta$  を Newmark 積分定数として、次式を仮定する。

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)dt &= (1-\gamma)\Delta t f(t_n) + \gamma\Delta t f(t_{n+1}) \\
\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t f(t')dt'dt & \\
&= \beta\Delta t^2 f(t_{n+1}) + (1/2-\beta)\Delta t^2 f(t_n) + \Delta t \int_{t_n}^{t_n} f(t')dt'
\end{aligned} \tag{8}$$

振動数領域で、 $i\omega$  倍は時間領域で一階微分に、 $\frac{1}{i\omega}$  は一階積分に対応することに留意して時間領域に変換し、式(8)を適用する。

$\beta = \gamma^2$  とし、 $g_j = \left\{1 + f_j^e(x_j) + \frac{c_s}{b}\gamma\Delta t f_j^p(x_j)\right\}$  と置けば次式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{ij}^{n+1}}{\partial x_j} g_{\chi} + \frac{c_s}{b} f_{\chi}^p(x_{\chi}) \left\{ (1-\gamma)\Delta t \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial \Sigma_{ij}^n}{\partial x_j} \right\} \\
&= \rho \left\{ 1 + f_1^e(x_1) \right\} \left\{ 1 + f_2^e(x_2) \right\} \ddot{u}_i^{n+1} \\
&+ \rho \frac{c_s}{b} \left[ \left\{ 1 + f_1^e(x_1) \right\} f_2^p(x_2) + \left\{ 1 + f_2^e(x_2) \right\} f_1^p(x_1) \right] \dot{u}_i \\
&+ \rho \left( \frac{c_s}{b} \right)^2 f_1^p(x_1) f_2^p(x_2) u_i
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl} + \frac{2\zeta b}{c_s} \dot{\varepsilon}_{kl} \right) \tag{10}$$

ひずみに関しても、総和規約を用いないものとして次式を得る。

$$\begin{aligned}
&g_i g_j \dot{\varepsilon}_{ij}^{n+1} \\
&+ \frac{c_s}{b} \left[ \left\{ 1 + f_i^e(x_i) \right\} f_j^p(x_j) + \left\{ 1 + f_j^e(x_j) \right\} f_i^p(x_i) \right] \hat{\varepsilon}_{ij}^{n+1} \\
&+ \left( \frac{c_s}{b} \right)^2 f_i^p(x_i) f_j^p(x_j) \hat{E}_{ij}^{n+1} \\
&= \frac{1}{2} \left[ g_i \frac{\partial \dot{u}_i^{n+1}}{\partial x_j} + g_j \frac{\partial \dot{u}_j^{n+1}}{\partial x_i} \right] \\
&+ \frac{c_s}{2b} \left\{ f_i^p(x_i) \frac{\partial \hat{u}_i^{n+1}}{\partial x_j} + f_j^p(x_j) \frac{\partial \hat{u}_j^{n+1}}{\partial x_i} \right\}
\end{aligned} \tag{11}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
\hat{u}_k^{n+1} &= (1-\gamma)\Delta t \dot{u}_k^n + \frac{\partial u_k^n}{\partial x_l} \\
\hat{\varepsilon}_{ij}^{n+1} &= (1-\gamma)\Delta t \dot{\varepsilon}_{ij}^n + \varepsilon_{ij}^n \\
\hat{E}_{ij}^{n+1} &= (1-\gamma)\Delta t \dot{\varepsilon}_{ij}^n + E_{ij}^n
\end{aligned} \right\} \tag{12}$$

ここで、上付きの文字  $n$  等は、時刻  $n\Delta t$  の値であることを示し、 $\sigma$ ,  $E$ ,  $U$  はそれぞれ、応力、ひずみ、変位の積分値を表す。重み関数を  $w_i$  として、式(9)に弱定式化を行えば、次式を得る。

$$\begin{aligned}
&\int_S w_i n_j \left[ \sigma_{ij}^{n+1} g_{\chi} + \frac{c_s}{b} f_{\chi}^p(x_{\chi}) \left\{ (1-\gamma)\Delta t \sigma_{ij}^n + \Sigma_{ij}^n \right\} \right] ds \\
&- \int_V \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left[ g_{\chi} \sigma_{ij}^{n+1} + \frac{c_s}{b} f_{\chi}^p(x_{\chi}) \left\{ (1-\gamma)\Delta t \sigma_{ij}^n + \Sigma_{ij}^n \right\} \right] dv \\
&= \int_V w_i \rho \left\{ 1 + f_1^e(x_1) \right\} \left\{ 1 + f_2^e(x_2) \right\} \ddot{u}_i^{n+1} dv \\
&+ \int_V w_i \rho \frac{c_s}{b} \left[ \left\{ 1 + f_1^e(x_1) \right\} f_2^p(x_2) + \left\{ 1 + f_2^e(x_2) \right\} f_1^p(x_1) \right] \dot{u}_i^{n+1} dv \\
&+ \int_V \rho w_i \left( \frac{c_s}{b} \right)^2 f_1^p(x_1) f_2^p(x_2) u_i^{n+1} dv
\end{aligned} \tag{13}$$

ここで  $n_j$  は表面の法線の成分、 $ds$ ,  $dv$  は表面及び体積要素である。式(10), (11)を代入してまとめると(総和規約を用いない)、

$$\begin{aligned}
&\int_V \rho f_M dv + \int_V \rho f_C \sum_i w_i \dot{u}_i^{n+1} dv \\
&+ \left( \gamma\Delta t + \frac{2\zeta b}{c_s} \right) \int_V I \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l g_j^{-1} g_l^{-1} C_{ijkl} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial \dot{u}_k^{n+1}}{\partial x_l} dv \\
&+ \int_V \rho f_k \sum_i w_i \dot{u}_i^{n+1} dv \\
&= \int_S \sum_i \sum_j w_i n_j \left[ I g_j^{-1} \sigma_{ij}^{n+1} + \frac{c_s}{b} f_{\chi}^p(x_{\chi}) \hat{\Sigma}_{ij}^n \right] ds \\
&- \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{c_s}{b} f_{\chi}^p(x_{\chi}) \hat{\Sigma}_{ij}^n dv \\
&- \left( \gamma\Delta t + \frac{2\zeta b}{c_s} \right) \int_V I \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l C_{ijkl} g_j^{-1} g_k^{-1} g_l^{-1} \\
&\times \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left[ \frac{c_s}{b} f_k^p(x_k) \frac{\partial \hat{u}_k^{n+1}}{\partial x_l} - 2 \frac{c_s}{b} \left\{ 1 + f_k^e(x_k) \right\} f_l^p(x_l) \hat{\varepsilon}_{kl}^{n+1} \right. \\
&- \left. \left( \frac{c_s}{b} \right)^2 f_k^p(x_k) f_l^p(x_l) \hat{E}_{kl}^{n+1} \right] dv \\
&- \int_V I \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l C_{ijkl} g_j^{-1} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \hat{\varepsilon}_{kl}^{n+1} dv
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\left. \begin{aligned}
I &= g_1 g_2 \\
f_M &= \{1 + f_1^e(x_1)\} \{1 + f_2^e(x_2)\} \\
f_C &= \frac{c_s}{b} \left[ \{1 + f_1^e(x_1)\} f_2^p(x_2) \right. \\
&\quad \left. + \{1 + f_2^e(x_2)\} f_1^p(x_1) \right] \\
f_K &= \left( \frac{c_s}{b} \right)^2 f_1^p(x_1) f_2^p(x_2) \\
\hat{\Sigma}_{ij}^n &= (1 - \gamma) \Delta t \sigma_{ij}^n + \Sigma_{ij}^n \\
\frac{\partial \hat{u}_k^{n+1}}{\partial x_i} &= (1 - \gamma) \Delta t \frac{\partial \dot{u}_k^n}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^n}{\partial x_i} \\
\hat{\varepsilon}_{ij}^{n+1} &= (1 - \gamma) \Delta t \varepsilon_{ij}^n + \varepsilon_{ij}^n
\end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となり，未知変数  $u_i^{n+1}$  に関する方程式となる．

これを，内挿関数を導入し重み関数  $w_i$  を仮想変位と考え，仮想変位  $w_i$  が任意であることを用いて PML 要素の節点の変位を未知数とする離散化が行える．左辺の各項が未知変数を含む項であるが，ひずみと変位の関係式(7)と動的平衡方程式(6)に同一の積分公式(8)を適用して，時刻  $n$  までの状態変数を既知とし  $g_j$  等を用いて定式化したこと，および  $C_{ijkl}$  が  $ij$  と  $kl$  を入れ換えても値が変わらないことから，各項とも仮想変位  $w_i$  と未知ベクトル  $\ddot{u}_i$ ， $\dot{u}_i$ ， $u_k$ ， $u_i$  等に関して対称となっており，離散化して得られる係数のマトリックスは対称となる．

## 2.2 地震入力の定式化

入射波の進行方向に  $\lambda_i = 1$  が成立する領域を考え，その領域の内部 1 メッシュ分と，外部は線形で，重ね合わせの原理が適用できるものとする．領域内部は入射波と外部へ向かう逸散波双方を考慮するが，外部では逸散波のみを考慮するものとする．内部 1 メッシュでは，境界上の節点では逸散波のみ，内部の節点では入射波と逸散波が考慮されている．それらの節点における入射波は既知とする．節点力の計算にはすべての節点の変位が必要である．

そこで，内部の節点に対する節点力の計算にあたっては，境界上の節点変位に入射波を加えた変位を用いる．また，境界上の節点に対する節点力の計算に当たっては，内部の節点の変位から入射波を差し引いた変位を用いればよい．PML 領域では波の進行方向のみに  $\lambda_i = 1$  となる

(例えば  $x_2$  方向とすると， $\lambda_2 = 1$ ， $\lambda_1 \neq 1$ )．このとき，内部節点における入力波に対応したメッシュ内の変位成分を  $u_i$  とする．またその変位により発生する応力とその積分値を  $\sigma_{ij}^n$ ， $\Sigma_{ij}^n$  とするとき， $u_i$  に対応した節点の節点力  $F_i^\alpha$  は，式(11)より次のように表せる．

$$\begin{aligned}
F_i^\alpha &= - \int_v \frac{\partial N^\alpha}{\partial x_j} \left[ g_{\chi} \sigma_{ij}^{n+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{c_s}{b} f_{\chi}^p(x_{\chi}) \{ (1 - \gamma) \Delta t \sigma_{ij}^n + \Sigma_{ij}^n \} \right] dv \\
&\quad - \int_v N^\alpha \rho f_m^e \dot{u}_i^{n+1} dv - \int_v N^\alpha \rho f_c^e \dot{u}_i^{n+1} dv \\
&\quad - \int_v N^\alpha \rho f_k^e u_i^{n+1} dv
\end{aligned} \quad (16)$$

ただし  $N^\alpha$  は節点の内挿関数である．この節点力を内部節点に対しては加え（その際の  $u_i$ ， $\sigma_{ij}^n$ ， $\Sigma_{ij}^n$  は境界上の節点の入射波に対するもの），境界上の節点に対しては差し引けば（その際の  $u_i$ ， $\sigma_{ij}^n$ ， $\Sigma_{ij}^n$  は内部節点の入射波に対するもの）よい．

## 2.3 計算例

図-1，図-2 にそれぞれ地震入力機能の検証のための，PML を有するモデルと通常の粘性境界と切り欠き力（自由地盤との境界に加えられる）からなるモデルを示す．有限要素は線形四辺形要素で，メッシュは一辺 1m の正方形である．PML のパラメータ  $f_i^e$ ， $f_i^p$  は FEM との境界で 0，外部との境界で 5，その間は線形に変化するものとしている．PML の外部鉛直境界が自由地盤と書かれているのは，その位置では水平方向からの波動伝播がほとんどなく鉛直方向の波動伝播のみで，事実上自由地盤と同一の応答となるためである．地盤の密度とラメ定数は，それぞれ，

$$\rho = 2t / m^3, \quad \mu = 10^4 KN / m^2, \quad \lambda = 10^4 KN / m^2$$

とし，卓越周期 0.5 秒，変位無次元振幅 0.2 の水平，鉛直方向の Ricker wavelet を入力した場合の地表での速度応答を図-3～図-6 に示す．水平方向一様地盤であるので鉛直波入力の場合の水平応答は 0 でなければならない．鉛直方向の平面波入力，粘性境界と切り欠き力モデルが最も適合する条件であるが，その場合でも PML モデルの精度はそれに優るとも劣らない．粘性境界のみや，側面自由境界では，このモデルのように鉛直長に比べて水平長の小さなモデルでは大きな誤差が生じている．

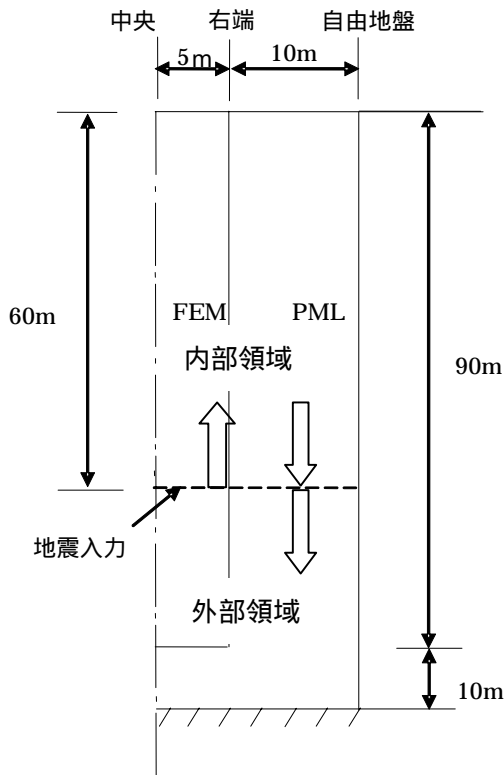


図-1 解析モデル (PML)

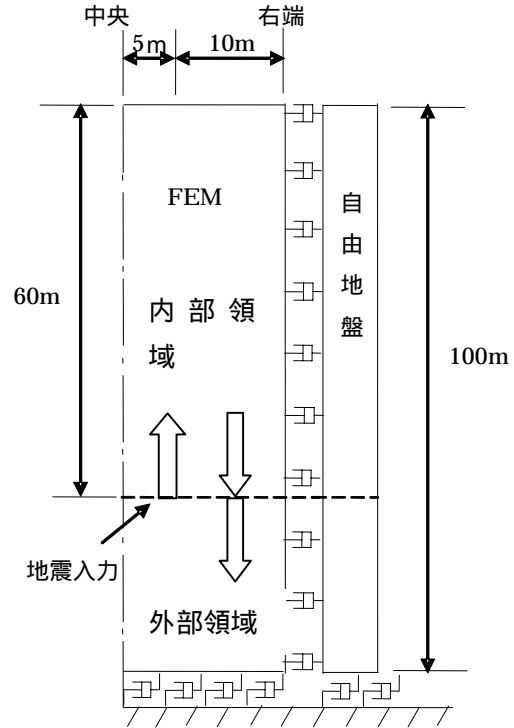


図-2 解析モデル (粘性境界+切り欠き力)

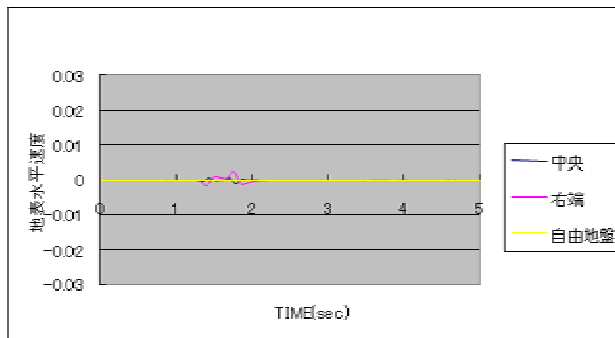


図-3 上下地震入力の水平応答 (PML)

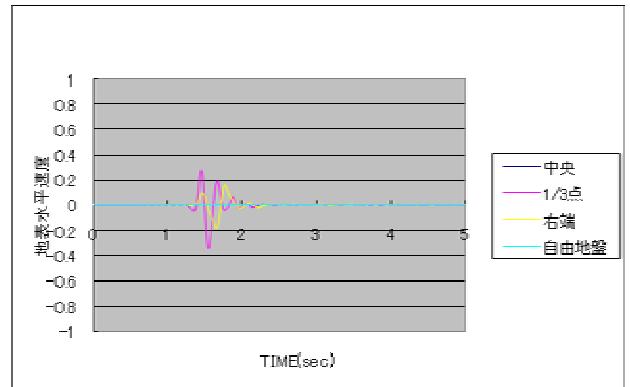


図-5 上下地震入力の水平応答 (粘性ダンパー)

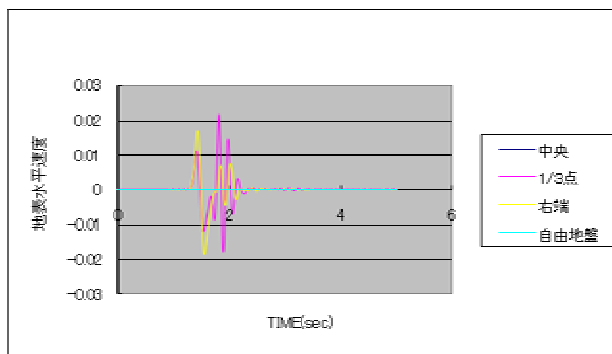


図-4 上下地震入力の水平応答 (粘性ダンパー+切り欠き力)

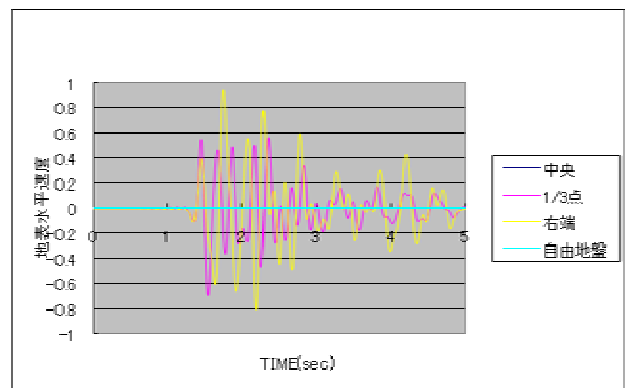


図-6 上下地震入力の水平応答 (側方自由境界)

### 3. 貯水と岩盤の相互作用を考慮した PML の定式化

#### 3.1 貯水要素の定式化

本節では、導入する式が長くなるため、1 段にて記述する。

貯水要素に関しては、Basu ら<sup>9)</sup>が、対称な定式化を行っているが、岩盤との相互作用も含めて対称化を行うためには、Basu ら<sup>9)</sup>のように動水圧を節点変数とするのではなく、速度ポテンシャルを節点変数とすることが望まれる。そこで、速度ポテンシャルを未知数とする、固体部と整合的な定式化を行う。

速度ポテンシャルに対する振動数領域の支配方程式が、 $\tilde{x}_i$  に対して成立しているものとして、 $x_i$  に変換し、両辺を  $\lambda_1, \lambda_2$  倍して得られる貯水の PML 方程式は、以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_i \varphi_i / c_w^2 &= -\omega^2 \vartheta (\rho_w / c_w^2) \phi \\ \varphi_i &= K \gamma_i \\ \gamma_i &= \frac{\partial}{\lambda_i \partial x_i} \phi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここで  $\vartheta = \lambda_1 \lambda_2$  で、 $\rho_w, K, \phi, c_w$  は、それぞれ貯水部の密度、体積弾性率、速度ポテンシャル、水中の音速である。これから以下のような時間領域の弱定式化を得る。

$$\begin{aligned} & \int_V w \frac{\rho_w}{c_w^2} (1 + f_1^e) (1 + f_2^e) \dot{\phi}^{n+1} dv \\ & + \int_V w \frac{\rho_w}{c_w^2} \left\{ (1 + f_1^e) \frac{c_w}{b} f_2^p + (1 + f_2^e) \frac{c_w}{b} f_1^p \right\} \dot{\phi}^{n+1} dv \\ & + \int_V \frac{\rho_w}{c_w^2} \left( \frac{c_w}{b} \right)^2 f_1^p f_2^p \phi^{n+1} dv + \int_V \rho_w \frac{\partial w}{\partial x_i} \left\{ \frac{I}{g_i g_i} \right\} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x_i} dv \\ & = \int_V \frac{\partial w}{\partial x_i} \rho_w \left[ \left\{ \frac{I}{g_i g_i} \right\} \frac{c_w}{b} f_i^p \hat{\Gamma}_i^{n+1} - \frac{c_w}{bK} f_i^p \Psi_i^{n+1} \right] dv \\ & + \int_S w n_i \rho_w \left( (1 + f_i^e) \gamma_i^{n+1} + \frac{c_w}{b} f_i^p \Gamma_i^{n+1} \right) ds \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_i^{n+1} &= (1 - \gamma) \Delta t \gamma_i + \Gamma_i^n \\ \hat{\Psi}_i^{n+1} &= (1 - \gamma) \Delta t \varphi_i + \Psi_i^{n+1} \end{aligned}$$

$\Gamma_i, \Psi_i$  はそれぞれ、 $\gamma_i, \varphi_i$  の積分値である。

$x_1$  を水平方向、 $x_2$  を鉛直方向にとるものとし、

貯水は岩盤上にあるので、貯水部では  $\lambda_2$  は恒等的に 1 とする。このとき式 (18) は、

$$\begin{aligned} & \int_V w \frac{\rho_w}{c_w^2} (1 + f_1^e) \dot{\phi}^{n+1} dv \\ & + \int_V w \frac{\rho_w}{c_w^2} \frac{c_w}{b} f_1^p \dot{\phi}^{n+1} dv + \int_V \frac{\partial w}{\partial x_i} \left\{ \frac{I}{g_i g_i} \right\} \rho_w \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x_i} dv \\ & = \int_V \left[ \frac{\partial w}{\partial x_1} \left\{ \frac{I}{g_1 g_1} \right\} \rho_w \frac{c_w}{b} f_1^p \hat{\Gamma}_1^{n+1} - \frac{\partial w}{\partial x_2} \rho_w \frac{c_w}{b} f_1^p \hat{\Gamma}_2^{n+1} \right] dv \\ & + \int_S w \left[ n_1 \rho_w (\gamma_1^{n+1}) + n_2 \rho_w \left\{ (1 + f_1^e) \gamma_2^{n+1} + \frac{c_w}{b} f_1^p \Gamma_2^{n+1} \right\} \right] ds \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{また,} \quad \gamma_2^{n+1} = \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x_2} \quad (20)$$

#### 3.2 相互作用要素の定式化

PML 領域では水底は水平とすれば、水底の法線ベクトルの成分は、 $n_1 = 0, n_2 = -1$  となる。

速度ポテンシャルの性質から、 $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$  が  $x_i$  方向の水粒子

子の速度に等しいこと、および  $-\rho_w \frac{\partial \phi}{\partial t}$  が動水圧に

等しいことから、式より、水底の境界条件は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} & - \int_S w \rho_w \left\{ (1 + f_1^e) \dot{u}_2 + \frac{c_w}{b} f_1^p u_2 \right\} dv \\ & = \int_S w \rho_w \left\{ (1 + f_1^e) \gamma_2^{n+1} + \frac{c_w}{b} f_1^p \Gamma_2^{n+1} \right\} ds \quad (\text{貯水側境界条件}) \\ & \int_S w_2 \rho_w \left\{ (1 + f_1^e) \dot{\phi} + \frac{c_w}{b} f_1^p \phi \right\} dv \\ & = \int_S w_2 \left( I g_2^{-1} \sigma_{22}^{n+1} + \frac{c_w}{b} f_1^p (x_1) \hat{\Sigma}_{22}^n \right) ds: \quad (\text{固体側境界条件}) \end{aligned}$$

$w$  に対応する項 (貯水部とそれに対応した相互作用項) の符合を逆にすれば、岩盤を含む系の方程式

の係数が対称となる。

### 3.3 貯水モデル

ここで取り扱うデータは全て無次元量である。

図-7に示す2次元無限長の貯水の左端に、図-8に示すような高さ方向に方物線型の振幅分布を有する正弦強制速度(周期 $\pi$ , 継続時間30)を加え、反力の時刻歴を求めた。高さ方向に15分割, 水平方向に720分割を用いて計算した結果を基準値とし(計算時刻内に反射波が返ってこない長さ), 水平方向にFEM15メッシュ, PML30メッシュのもの, FEM45メッシュの端部に粘性境界(境界に, 単位長さ

当たり  $\frac{\rho_w}{c_w}$  の係数をもつ粘性ダンパーを配置)を用いたも

のを比較した。メッシュ幅および高さは1/15, 水中の音速1,  $f_1^e, f_1^p$  は線形に変化し, 右端で10となるようにした。

結果を図-9に示す。

PMLは基準値に良好に一致したが, 粘性境界の結果は大きな反射波の影響が見られる。

次に, 水と地盤のPMLにおける相互作用項の検証のため, 図-10のようなモデルを用い, 上向きに入射波を加えて応答を計算した。メッシュ幅と高さは1, 水部水深(H)を20分割, 地盤深さ方向FEM部(D)を70分割, PML部(DP)を10分割, 水平方向FEM部(L)を2分割, PML部(LP)を5分割し,  $f_1^e, f_1^p$  は線形に変化し, 右端で10となるよう

にし,  $f_2^e, f_2^p$  も線形に変化し, 下端で10となるようにした。水部の質量1, 音速50, 固体部の質量2, ラメ定数はともに10000とした。地盤表面から下方40の箇所から上方に卓越周期0.2のRicker waveletを入射して応答を計算した。

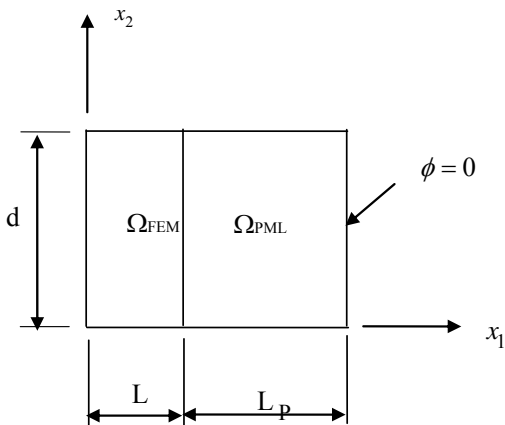


図-7 貯水モデル

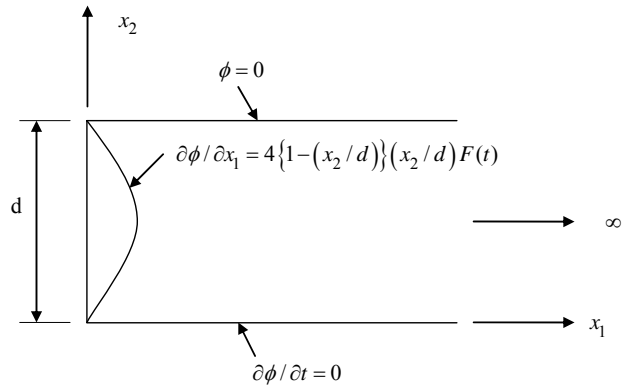


図-8 境界条件

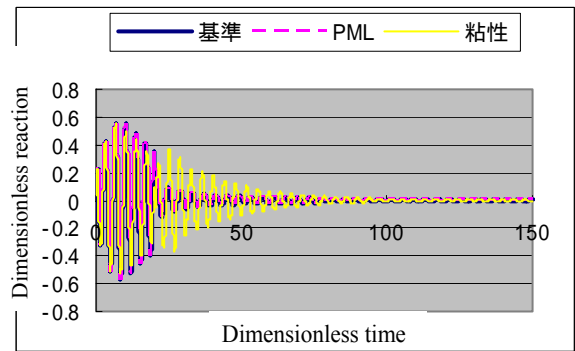


図-9 貯水モデル反力時刻歴

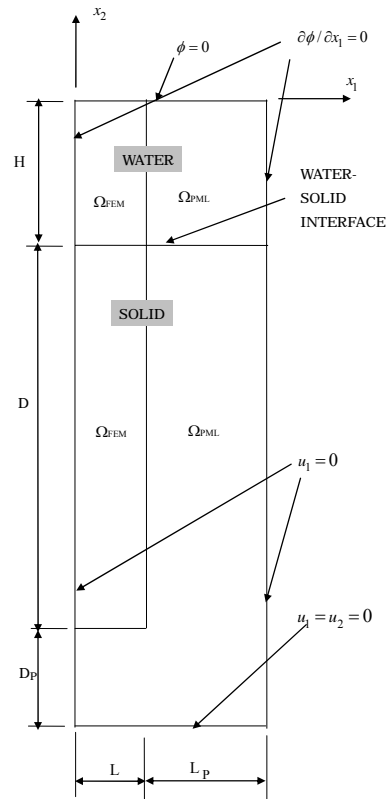


図-10 貯水・岩盤モデル

水底の水圧の時刻歴を図-11に示す。

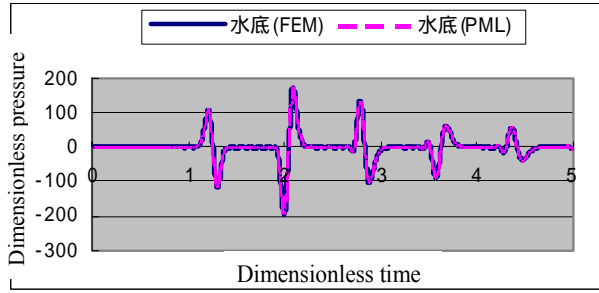


図-11 水底の水圧時刻歴

FEM部(図-10モデル左端)とPML部(図-10モデル右端)で応答が等しく、FEM部と同様、PML部の相互作用項が正しく機能していること、およびPML内でも座標変換されていない方向の波動については、FEM部と同様な伝達特性を有していることが明らかである。

### 3.4 ダム貯水岩盤モデル

ここで取り扱うデータは全て無次元量である。

図-12に示すダム貯水岩盤モデルを用い、岩盤と貯水の領域、PML領域の大きさを変えて卓越周期0.2のRicker waveletを下部から入射して応答を計算し、そのダム上流面の全水圧の時刻歴を求めた。また、PMLをすべてFEMとし端部に粘性境界を用いた場合についても求めた(モデル底部及び、モデル両側に自由地盤を設置してこの

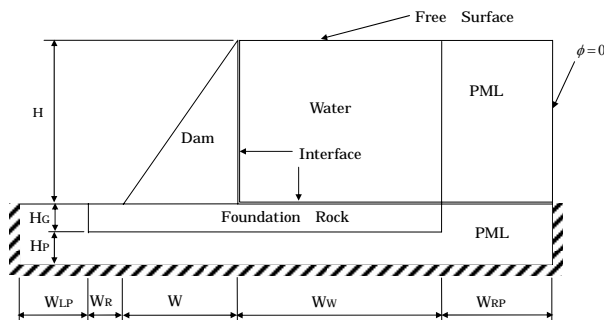


図-12 ダム貯水岩盤モデル

間を岩盤部、貯水部について、それぞれ2.3, 3.3で用いたものと同様の粘性ダンパーで結合)。メッシュの寸法は高さ幅とも10で、Hを10分割、Wを8分割、PML領域のWLP, WRP, HPを10分割、PML領域内では  $f_1^e, f_1^p, f_2^e, f_2^p$  は線形で端部で10となる。WRを5分割、WWを10分割、HGを5分割したモデルをSMALL, WRを10分割、WWを20分割、HGを10分割したモデルをLARGEとし、水部の質量を102、音速を1400、固体部(ダム岩盤共通)の質量204、ラメ定数を  $1.2 \times 10^9$  とした。

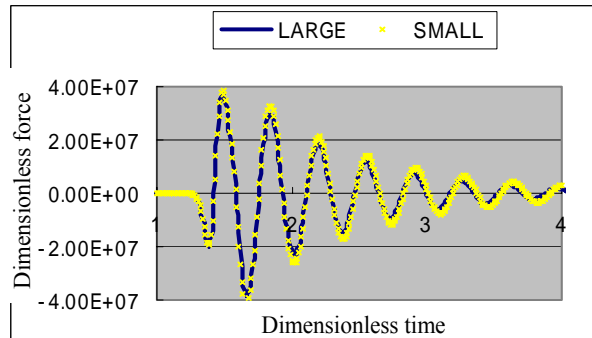


図-13 壁面の全水圧時刻歴モデルの差(PML)

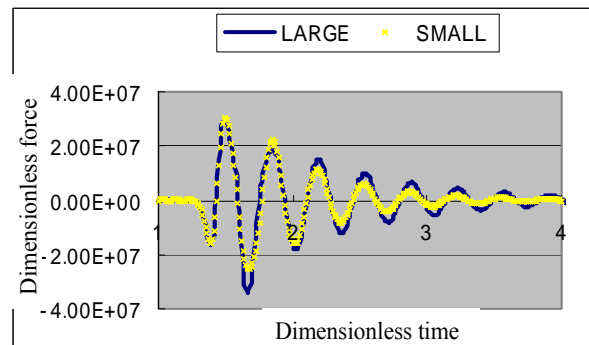


図-14 壁面の全水圧時刻歴モデルの差(粘性境界)

結果を図-13, 図-14に示す、粘性境界に比べ、PMLはモデルの大きさによる差が比較的小さく、PMLの有効性が確認できた。

## 4. Convolutional PMLの定式化と非線形解析への適用

### 4.1 Convolutional PML

本節では、導入する式が長くなるため、1段にて記述する。

通常のPMLは、 $\omega$ が小さい場合に誤差が出る可能性がある。そこで、次のように座標変換係数を変え、 $\omega$ の実軸上の特異点をなくす<sup>9)</sup>。

$$\lambda_{\tau} = k_i + \frac{\sigma_i}{\alpha_i + i\omega} \quad (21)$$

ここで、 $k_i, \sigma_i, \alpha_i$ は  $x_i$  のみの関数とする。PMLの運動方程式は、

$$-\omega^2 \rho \bar{u}_i = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \quad (22)$$

また、ひずみが以下のように書ける。

$$\bar{f}_{ij} = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{f}_{ij} + \bar{f}_{ji}) \quad (23)$$

ここではまず、非線形弾性型の非線形を考えるものとし、次のような応力ひずみ関係を考える。



$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \bar{f}_{kl} + D_{ijpqrs} \bar{f}_{pq} \bar{f}_{rs} \bar{f}_{mn} \quad (24)$$

2次元問題を考え、式(22)の両辺に $\lambda_1, \lambda_2$ を乗じ整理すると

$$\begin{aligned} & -\rho\omega^2 \left(k_1 + \frac{\sigma_1}{\alpha_1 + i\omega}\right) \left(k_2 + \frac{\sigma_2}{\alpha_2 + i\omega}\right) \bar{u}_i \\ & = \left(k_{\neq} + \frac{\sigma_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega}\right) \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (25)$$

これを展開し、重み関数 $w_i$ を用いて弱定式化を行うと、

$$\begin{aligned} & \int_V -\rho\omega^2 w_i \left\{ \begin{aligned} & k_1 k_2 + \frac{k_2 \sigma_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \sigma_1 \sigma_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \\ & + \frac{k_1 \sigma_2 (\alpha_2 - \alpha_1) - \sigma_1 \sigma_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \end{aligned} \right\} \bar{u}_i dv \\ & = \int w_i \left(k_{\neq} + \frac{\sigma_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega}\right) \bar{\sigma}_{ij} n_j ds \\ & - \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left(k_{\neq} + \frac{\sigma_{\neq}}{\alpha_{\neq} + i\omega}\right) \bar{\sigma}_{ij}^i du \end{aligned} \quad (26)$$

フーリエ逆変換による時間領域に変換すると、

$$\begin{aligned} & \int_V \rho w_i \left\{ \begin{aligned} & k_1 k_2 \ddot{u}_i + \frac{k_2 \sigma_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \sigma_1 \sigma_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_1 t} * \ddot{u}_i \\ & + \frac{k_1 \sigma_2 (\alpha_2 - \alpha_1) - \sigma_1 \sigma_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_2 t} * \ddot{u}_i \end{aligned} \right\} dv \\ & = \int w_i \left(k_{\neq} \sigma_{ij} + \sigma_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} t} * \sigma_{ij} n_j\right) ds \\ & - \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left(k_{\neq} \sigma_{ij} + \sigma_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} t} * \sigma_{ij}\right) dv \end{aligned} \quad (27)$$

ここで\*は、畳み込み積分を意味する。同様に式(23)より、

$$k_j f_{ij} \sigma_j e^{-\alpha_j t} * f_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (28)$$

ところで、 $F(t)$ を任意関数として

$$e^{-\alpha t} * f(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} f(t') dt' = F(t) \quad \text{とおけば、}$$

$F(t + \Delta t)$ は次式のように近似できる。

$$\begin{aligned} F(t + \Delta t) &= \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha(t+\Delta t-t')} f(t') dt' \\ &+ e^{-\alpha \Delta t} \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} f(t') dt' \\ &= \theta \Delta t f(t + \Delta t) + e^{-\alpha \Delta t} F^*(t) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq 1, F_{(t)}^* = F(t) + (1 - \theta) \Delta t f(t)$ である。

式(27)より、

$$\begin{aligned} & \int_V \rho w_i \left\{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \sigma_1 + k_1 \sigma_2) \right\} \ddot{u}_i(t + \Delta t) dv \\ & - \int_V \rho w_i \left\{ \begin{aligned} & \left( k_2 \sigma_1 + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \right) e^{-\alpha_1 \Delta t} U_{i1}^*(t) \\ & + \left( k_1 \sigma_2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) e^{-\alpha_2 \Delta t} U_{i2}^*(t) \end{aligned} \right\} dv \\ & = \int w_i \left( k_{\neq} \sigma_{ij} + \sigma_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} t} * \sigma_{ij} n_j \right) ds \\ & - \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left\{ \left( k_{\neq} + \theta \Delta t \sigma_{\neq} \right) \sigma_{ij}(t + \Delta t) + \sigma_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} \Delta t} \sum_{ij}^* (t) \right\} dv \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、

$$u_{i1}^*(t) = \int_0^t e^{-\alpha_1(t-t')} \ddot{u}_i(t') dt' + \Delta t (1 - \theta) \ddot{u}_i(t)$$

$$u_{i2}^*(t) = \int_0^t e^{-\alpha_2(t-t')} \ddot{u}_i(t') dt' + \Delta t (1 - \theta) \ddot{u}_i(t)$$

$$\sum_{ij}^* = \int_0^t e^{-\alpha_{\neq}(t-t')} \sigma_{ij}(t') dt' + \Delta t (1 - \theta) \sigma_{ij}(t)$$

なお、線形問題で示すと、

$$\begin{aligned} & \int_V \rho w_i \left\{ k_1 k_2 + \theta \Delta t (k_2 \sigma_1 + k_1 \sigma_2) \right\} \ddot{u}_i(t + \Delta t) dv \\ & + \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{DI}{g'_j g'_l} C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(t + \Delta t) dv \\ & = \int w_i \left( k_{\neq} \sigma_{ij} + \sigma_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} t} * \sigma_{ij} n_j \right) ds \\ & - \int_V \rho w_i \left\{ \begin{aligned} & \left( k_2 \sigma_1 + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \right) e^{-\alpha_1 \Delta t} U_{i1}^*(t) \\ & + \left( k_1 \sigma_2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \right) e^{-\alpha_2 \Delta t} U_{i2}^*(t) \end{aligned} \right\} dv \\ & - \int \frac{\partial w_i}{\partial w_l} \sigma_{\neq} e^{-\alpha_{\neq} \Delta t} \sum_{ij}^*(t) dv \\ & + \int \frac{\partial w_i}{\partial w_j} \frac{DI}{g'_j g'_l} C_{ijkl} e^{-\alpha_l \Delta t} \sigma_l F_{kl}^* \end{aligned} \quad (31)$$

と、左辺は $w$ と $u$ に対して対称な表現となっているので、係数マトリックスを対称化できる。ここで、 $g'_j = k_j + \theta \Delta t \sigma_j, DI = g'_l g'_l$ である。

#### 4.2 計算例（次元問題）

次元非線形弾性型の応力 ひずみ関係を

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2G)(f_{11} + b f_{11}^3)$$

と仮定する。

$$\text{今回} \quad \alpha_1 = \frac{x}{L_p} \alpha_{MAX} \quad , \quad \sigma_1 = \frac{x}{L_p} \sigma_{MAX} \quad , \quad \kappa_1 = 1 + \frac{x}{L_p} \kappa_{MAX} \quad ,$$

$\alpha_{MAX} = 1, \sigma_{MAX} = 10, \kappa_{MAX} = 10$ とした。 $x$ はPML

と FEM の境界からの距離である。

図-15 のような 1 次元弾性体の一端に、振幅  $\sqrt{\pi}/10$ 、周期 10 の正弦波を強制変位として与えて応答を計算した。ただし、メッシュ寸法は 1、 $L$  は 100 で、 $L_p$  は 30 とする。線形の場合と非線形の場合 ( $b=300$ ) の応答を、すべて FEM 領域として端部に粘性境界 (端部を  $\rho_s$  として、 $\rho_s \sqrt{(\lambda+2G)/\rho_s}$  のダンパーを境界に設定) を加えたものと比較して示した。PML と FEM の境界位置での変位時刻歴を図-16 と図-17 に示す。線形の場合両者は一致するが、非線形の場合は、粘性境界に比べて PML の反射波は小さい。粘性境界は、境界に垂直に入射する弾性波に対して導出されており、1 次元弾性波はその条件に一致して吸収性能は高いが、非線形の場合

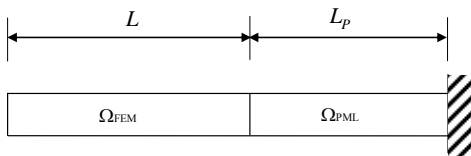


図-15 解析モデル

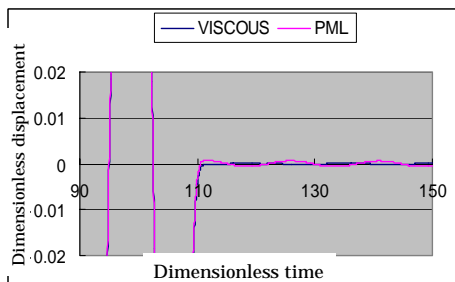


図-16 変位応答の比較 (線形解析)

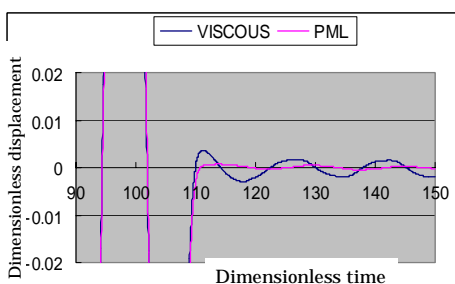


図-17 変位応答の比較 (非線形解析)

は性能が悪くなる。PML の定式化は、非線形に対しても適用できるため、性能低下が小さいと考えられる。

## 5. 結論

FEM 解析は、側方・底面境界で発生する反射波の影響により応答の精度が低下することを防ぐため、地盤のモデル化に大規模な領域が必要であり、結果として多量の計算量を必要とする。そこで本研究では、理想的な境界と考え

られる PML の、有限要素法に整合して変数非分離型の陰解法で係数マトリックスが対称となる定式化と、地震入力の定式化を行った。次に、解析事例としてダムを取り上げ、ダムの地震時挙動に大きな影響を及ぼす貯水池・岩盤との相互作用を考慮した検討を示した。ここでも貯水と岩盤の相互作用を考慮できる対称な定式化を提案した。さらに、Convolutional PML の定式化を行い、非線形応答を対象とした解析事例に適用した。

以上より得られた知見を以下に示す。

- ・時間領域に適用する PML の有限要素法に適合し、係数マトリックスが対称となる定式化を行った。また地震入力の定式化を行った。
- ・粘性境界と PML 境界による応答精度の比較を行った。単一地盤であっても 2 層となっても、また非線形応答を示した場合においても、PML 境界が最も精度の良いことを示した。
- ・貯水要素に関して、速度ポテンシャルを節点変数とすることで、PML 領域においても貯水と岩盤の相互作用を考慮できる、係数マトリックスが対称となる定式化を行い、有効性を確認した。

今後は、より複雑なモデル (地盤と構造物の動的相互作用を考慮した FEM モデル) に PML を適用し、地震時の複雑な非線形挙動にも適用可能のための定式化、解析的検討を行っていく予定である。

## 謝辞

本研究は、平成 16 年度文部科学省学術フロンティア推進事業 (日本大学理工学部：継続)「環境・防災都市に関する研究」(研究代表者：石丸辰治)の一環として実施したものである。

## 参考文献

- 1) (社)日本道路協会：道路橋示方書・同解説 V 耐震設計編，2002.3
- 2) (社)日本港湾協会：港湾の施設の技術上の基準・同解説，2007.
- 3) 宇野州彦，塩尻弘雄，川口和広，仲村成貴，中原知洋，大島貴充：解析手法や境界条件等の違いが地盤 - 基礎 - 上部構造物からなる系の動的挙動に与える影響評価，第 29 回地震工学研究発表会講演論文集，pp.1151-1158，2007.6
- 4) J. P. Berenger : A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, *Journal of Computational Physics*, **114**, pp. 185-200, 1994.
- 5) 宇野亨：FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析，コロナ社，1998.
- 6) Festa, G. and Nielsen, S. : " PML absorbing Boundaries ", *Bulletin of Seismological Society of America*, Vol.93, No.2, pp.891-903, 2003
- 7) Basu, U. and Chopra, A. K. : " Perfectly matched layers for

- time harmonic elastodynamics of unbounded domains.” , *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.192, pp.1337-1375, 2003.
- 8) Basu, U. and Chopra, A. K : “Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains.” , *International Journal for Numerical methods in Engineering* 2004; Vol59 , No8 , pp.1039-1074 , 2004.
- 9) Basu, U. : Perfectly Matched Layers for Acoustic and Elastic Waves : Theory , Finite-Element Implementation and Application to Earthquake Analysis of Dam-Water Foundation Rock System , *A dissertation* , University of California , Berkeley , 2004.
- 10) J. Alan Roden , Stephen D. Gedney : Convolutional PML (CPML): An Efficient FDTD Implementation of the CFS-PML for Arbitrary Media , *Microwave and Optical Technology Letters* , pp.1-18 , June 2000.

(2009年4月9日 受付)