

炭素繊維シート補強された脆性体構造要素の付着破壊解析*

田中英紀^{*1}, 都井裕^{*2}Adhesive Failure Analysis of Structural Elements Reinforced
with Carbon Fiber SheetsHidenori TANAKA and Yutaka TOI^{*3}^{*3}Institute of Industrial Science, The University of Tokyo,
4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8505 Japan

The elasto-plastic damageable constitutive equation based on damage mechanics has been formulated by using Drucker-Prager's equivalent stress, Tresca's stress and maximum principal stress to analyze adhesive failure of concrete structural elements reinforced with carbon fiber sheets. The formulated constitutive equation is implemented in the two-dimensional finite element program to simulate experimental results. Some parameters in the constitutive equation are identified by static and fatigue failure tests. The present study focuses on failure of concrete surface beneath epoxy resin to glue carbon fiber sheet. The calculated results have been compared with experimental results to illustrate the validity of the proposed method of analysis.

Key Words: Computational Mechanics, Structural Analysis, Damage Mechanics, Fatigue, Finite Element Method, Carbon Fiber Sheet, Concrete-Structures

1. はじめに

炭素繊維は、高強度、高弾性、軽量(アルミニウムの約1/2)などの特長を持つ素材であり、70年代の生産開始以来、ゴルフクラブのシャフトへの利用に始まり、自転車のフレームなどへも適用されている。さらに、その軽量性能により、旅客機の主翼や尾翼、胴体へも採用され、機体重量の約半分を占める機種も設計されている。

また、他の産業用途については、風力発電用の風車ブレードや土木建築のRC柱・はりの耐震補強、高速道路の床版補強やトンネルの覆工コンクリートはく落防止などのメンテナンス技術として、炭素繊維をエポキシ樹脂でシート状に加工してコンクリート表面に貼付する工法が適用され、その力学特性についても研究されている⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。特に阪神淡路大震災以後では、施工も比較的容易であるため、それまでの使用量の約4倍もの炭素繊維シートが、RC構造物の耐震補強に使用されている⁽⁵⁾。

しかし、炭素繊維シート補強したコンクリート構造要素の耐荷力・耐久性については、実験的なアプローチが主であり、より合理的な設計を行うためには、解析的な評価法の早期確立が必要となる。

空間的な制約条件を受けずに、炭素繊維シートによりコンクリート構造要素を補強する場合は、炭素繊維シート間の継ぎ手強度や引張強度で破壊モードが決まるが、床版桁の中間支持点などの制約条件を受ける場合は、炭素繊維シートとコンクリート界面のはく離破壊(コンクリートの表層破壊)が、付着面全体に急速に伝ばし、構造体としての耐荷性能を低下させるモードが卓越するため、その設計手法は重要な課題であると考えられている⁽⁶⁾。

そこで本研究では、炭素繊維シートとコンクリートの付着挙動を調査するために実施された単調載荷、および疲労付着破壊実験⁽⁷⁾の解析に、損傷力学モデルに基づく有限要素法を適用した。損傷力学のコンクリートへの適用については、構成則から部材耐力算定までいくつかの研究例があるが⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾、コンクリート構造物のメンテナンスが注目されている現在、損傷力学モデルは、構造要素の経時劣化や余寿命予測のツールとして期待されており、今後ますます応用拡大が進むものと考えられている。

* 原稿受付 2006年5月15日。

^{*1} 正員, 東京大学大学院工学系研究科(〒153-8505 東京都目黒区駒場4-6-1)。^{*2} 正員, フェロー, 東京大学生産技術研究所。

E-mail: toi@iis.u-tokyo.ac.jp

なおモデル作成において、はく離破壊はコンクリートの特性が支配的であるため、コンクリートよりも高強度の炭素繊維シートおよびエポキシ樹脂は、線形弾性体と仮定している。また、コンクリートを損傷力学モデルに適用するに当たっては、繰返し載荷実験⁽¹¹⁾において、除荷時に塑性ひずみを生じるコンクリートの特性を考慮して、Drucker-Pragerの相当応力と最大主応力を組合わせた構成式⁽¹²⁾に、せん断変形が卓越する場合に対応できるようにTrescaの相当応力を組み込んで、二次元弾塑性損傷構成式を定式化し、二次元有限要素解析プログラムにインプリメントした。さらに、単調載荷および疲労実験から材料パラメータを設定し、炭素繊維シートの付着長が異なる実験結果⁽⁷⁾と解析結果とを比較することにより、解析モデルの有用性を確認した。

以下、2章では弾塑性損傷構成方程式の定式化と材料パラメータの設定、3章では単調載荷付着破壊解析と実験結果との比較、4章では疲労付着破壊解析と実験結果との比較について述べる。最後の5章は結論である。

2. 弾塑性損傷構成方程式の定式化と同定

2.1 弾塑性損傷構成方程式 弾塑性損傷構成方程式は、応力増分とひずみ増分を関係付ける接線形の応力・ひずみマトリックスを用いて表記できる⁽¹³⁾⁽¹⁵⁾。相当応力は次式のように仮定する。

$$\sigma_{eq} = \alpha I_1 + (J_2')^{1/2} + \beta \langle \sigma_{max} \rangle + \delta |\tau_{max}| \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 α, β, δ は塑性ポテンシャルに関係する定数、 σ_{max} は最大主応力、 τ_{max} は最大せん断応力、 I_1 は応力の第1不変量、 J_2' は偏差応力の第2不変量である。

損傷 D の発展方程式として、単調載荷破壊解析には式(2)を⁽¹⁶⁾、疲労破壊解析には式(3)および式(4)を用いる⁽¹⁷⁾。

$$dD = \left(\frac{Y}{S_1} \right)^{S_2} dp \dots\dots\dots (2)$$

$$dD = \left(\frac{Y}{S_{pf1}} \right)^{S_{pf2}} dp \dots\dots\dots (3)$$

$$dD = \left(\frac{Y}{S_{ef1}} \right)^{S_{ef2}} de \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 Y はひずみエネルギー密度開放率である。 S_1 と S_2 は単調載荷破壊解析時に用いる材料定数であり、累積相当塑性ひずみの増加とともに損傷が進展する。疲労破壊解析では、損傷発展方程式を塑性疲労損傷と弾性疲労損傷の2パターンに分けて設定することにより、損傷進展を詳細に評価することが可能となる。ここに、 S_{pf1} と S_{pf2} は塑性疲労損傷に関わる材料定数、 dp は累積相当塑性ひずみ増分、 S_{ef1} と S_{ef2} は弾性疲労損傷に関わる材料定数、 de は累積相当弾性ひずみ増分である。

2.2 材料パラメータの設定 構成方程式中の各材料パラメータは、コンクリートブロックの側面にエポキシ樹脂を接着剤として取付けた、炭素繊維シートの上端を載荷する単調載荷付着破壊試験、および疲労付着破壊試験結果⁽⁷⁾から決定した。表1, 2および表3にそれぞれコンクリート、エポキシ樹脂、炭素繊維シートに関する材料定数を示す。表1のコンクリートに対する材料定数は具体的には、①後述(3章の表4)のケース3に対する単調載荷付着破壊荷重を、実験結果(表4)と整合させる、②コンクリートの応力・ひずみ関係を、単軸圧縮および引張試験結果⁽¹³⁾と整合させる、の二つの条件に基づいて、試行錯誤的な計算手順により決定した。

塑性および損傷発展に関わる材料パラメータの物理的意味と力学的影響について、以下に補足する。 K および n はひずみ硬化に関するパラメータ⁽¹³⁾であり、大きな値をとるほど硬化が大きい。 S_1 および S_2 は損傷発展に関するパラメータ(式(2))であり、 S_1 を小さくし、 S_2 を大きくすると損傷変数 D の変化率は増大する。また、 ϵ_{pD} および D_{cr} はそれぞれ、損傷発生開始時の相当塑性ひずみと、メゾクラックが発生する限界損傷変数を表す。前者は零(すなわち降伏後ただちに損傷が発生する)と仮定し、後者は単軸引張試験

Table 1 Material constants for concrete (static)

E (Young's modulus)	30000.0 (MPa)
ν (Poisson's ratio)	0.17
α (plastic potential)	0.85
β (plastic potential)	0.035
δ (plastic potential)	0.01
σ_y (yield stress)	1.50 (MPa)
K (plastic hardening)	45.0 (MPa)
n (plastic hardening)	0.175
S_1 (damage parameter)	9.50×10^{-7} (MPa)
S_2 (damage parameter)	1.55
ϵ_{pD} (damage threshold)	0.00
D_{cr} (critical damage)	7.45×10^{-2}

Table 2 Material constants for epoxy resin

E (Young's modulus)	2000.0 (MPa)
ν (Poisson's ratio)	0.36

Table 3 Material constants for carbon fiber sheet

E (Young's modulus)	350000.0 (MPa)
ν (Poisson's ratio)	0.20

における破壊点に対応するように決定している。後述の解析例では、損傷変数が限界値 D_{cr} に達して以降、 $D=0.99$ と仮定して応力解放計算を行うことにより、クラッキングを表現している。

3. 単調載荷付着破壊解析と 実験結果の比較

図1に示す試験体を用いて行われた単調載荷付着破壊実験結果⁷⁾として、最大荷重を表4に示す。実験は付着幅 W を80 mm 一定として、付着長 L を20, 40 および80 mm とした3ケースと、付着幅 W を40 mm, 付着長 L を80 mm とした合計4ケース実施されているが⁷⁾、その中から付着幅 W を一定として付着長 L を3ケース設定した結果を、本研究では参照することとした。なお、実験は各ケースで2回、合計6回実施されているため、その平均値も表記している。以後の有限要素解析結果との対比においては、この平均値を実験結果の代表値として用いることを付記しておく。

本章では、2章で提示した弾塑性損傷構成方程式を、二次元(平面ひずみ)有限要素解析プログラム⁽¹⁸⁾に組込んで、表4に示す3ケースの試験体の解析を行い、最大荷重を比較した。実験同様、炭素繊維シートの上端を鉛直上向きに載荷した。境界条件として、コンクリートの上面の鉛直方向変位、および炭素繊維シート

Table 4 Results of experiments

CASE	Adhesive length L (mm)	Adhesive width W (mm)	Maximum load (kN)	Mean load (kN)
CASE 1	80	80	7.4 8.7	8.1
CASE 2	40	80	8.6 9.9	9.3
CASE 3	20	80	10.6 11.6	11.1

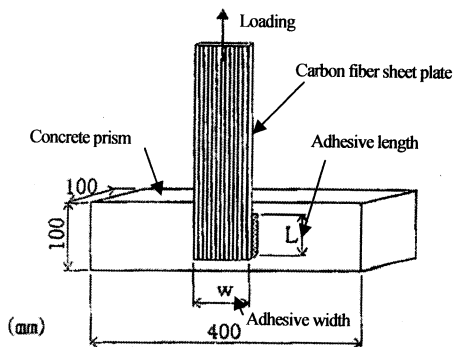


Fig. 1 Specimen of adhesive failure test (unit: mm)

を貼付した側面の水平方向変位を固定した。図2にメッシュ図を示す。水平方向は、炭素繊維シートおよびエポキシ樹脂はそれぞれ1要素分割とし、コンクリート最表層は0.1 mm 幅、以下1.0 mm 幅、その他の部位は18.8 mm 幅で分割した。鉛直方向については、全要素2 mm で50分割とした。図中のA部およびB部は、図1の付着長 L の始点と終点を示し、それぞれ根元部と先端部と呼称する。

図3に各解析ケースの荷重-変位曲線を、表5に最

Table 5 Results of 2-dimensional FEM

CASE	Adhesive length L (mm)	Adhesive width W (mm)	Maximum load (kN)
CASE 1	80	80	17.4
CASE 2	40	80	14.8
CASE 3	20	80	8.4

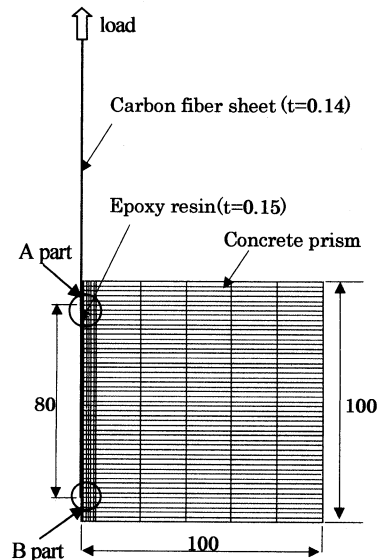


Fig. 2 Finite element model for case 1 (unit: mm)

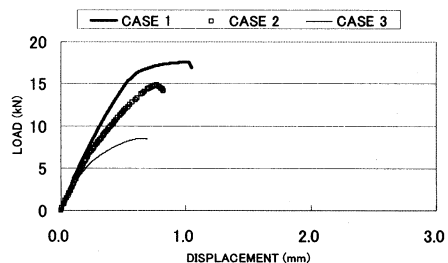


Fig. 3 Load-displacement curves

大荷重を示す。解析で得られた最大荷重は、付着長 L の増加に対して大きくなる。一方、表 4 に示したように実験結果においては、 L の増加に対して最大荷重は同等、もしくは小さくなる傾向を示している。したがって、図 4 においては両者の隔たりは大きいように見える。

そこで、付着面積 ($L \times W$) に比例して、最大荷重が線形的に増加すると仮定した参照曲線を、付着面積が最も小さいケース 3 を基準として導入する。本研究では、付着幅 W は全ケースで同一であるので、付着面積を付着長と置換えて考えることもできる。図 5 に参照曲線と、実験および解析で得られた最大荷重の分布を示す。参照曲線と対比すると、実験による最大荷重は付着面積の増加率に比例して増加せず、付着面積の影響をほとんど受けていない。解析結果も同様の傾向を示しており、その意味で、両者は定性的に対応していることがわかる。

さらに図 6 には、解析で得られた最大荷重を、参照曲線の各付着面積に対応する荷重で正規化した結果を示す。参照曲線に対する低減率の観点から、解析結果と実験結果は良好に対応していることが再び確認される。このような低減が生じる理由は、付着破壊が直接的には界面端部近傍の応力集中に起因しており、この

応力集中は、付着面積の増大による影響をほとんど受けないことにあると考えられ、本解析はそれを良好に再現していると判断される。なお、炭素繊維シートおよびエポキシ樹脂に生じた応力は、以下のとおりである。ケース 3 の付着破壊時において、荷重載荷点位置の炭素繊維シートには、破断強度 (3400 N/mm^2) の 20% 程度の 723 N/mm^2 の応力が生じ、根元部のエポキシ樹脂には、せん断強度 30 N/mm^2 の 75% 程度の 23 N/mm^2 のせん断応力が発生した。したがって、コンクリートのはく離破壊によって付着破壊荷重が決定された。

4. 疲労付着破壊解析と実験結果の比較

本章では、図 1 の試験体を用いて行われた付着疲労破壊実験⁽⁷⁾を、3 章と同一の二次元有限要素解析プログラムを利用して数値解析し、結果を対比した。表 6 にケース 3、すなわち付着長 20 mm の場合の実験結果に基づき決定した、コンクリートの材料パラメータ

Table 6 Material constants for concrete (fatigue)

σ_f (fatigue limit stress)	1.875 (MPa)
S_{pf1} (damage parameter)	9.25×10^{-4} (MPa)
S_{pf2} (damage parameter)	1.55
S_{ef1} (damage parameter)	4.25×10^{-3} (MPa)
S_{ef2} (damage parameter)	5.375

Table 7 Results of fatigue tests and analyses (case 3)

Experiments		Analyses
Maximum load (kN)	Critical number of cycles	Critical number of cycles
8.836	79	141
8.653	1,404	-
8.575	147	-
8.408	879	540
8.208	744	-

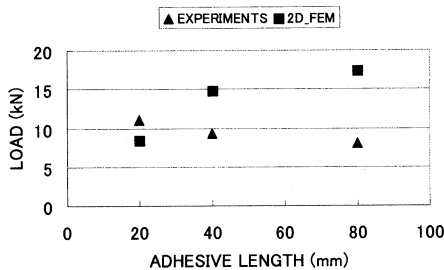


Fig. 4 Maximum load-adhesive length relations

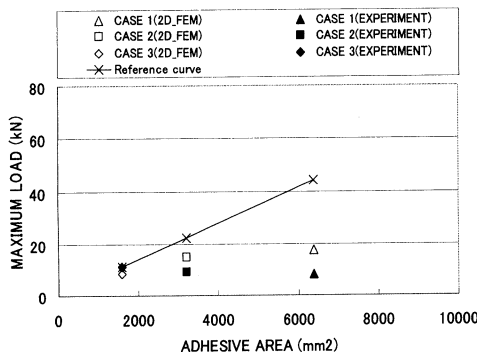


Fig. 5 Maximum load-adhesive area relations

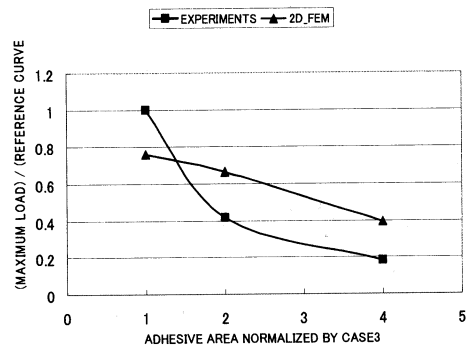


Fig. 6 Normalized maximum load and adhesive area

を示す。表6には、疲労付着破壊解析のために新たに付加したパラメータのみを示している。これらのパラメータは、主として表7に示すケース3に対する疲労付着破壊実験結果と、荷重・疲労破壊回数との関係が整合するように設定し、他のケースの解析結果とも総体的に良好に対応していることを確認して、最終決定した。ここに、 S_{pf1} と S_{pf2} 、 S_{ef1} と S_{ef2} はそれぞれ、塑性疲労損傷(式(3))および弾性疲労損傷(式(4))の、発展に関するパラメータである。一般に塑性疲労の場合、単調載荷の場合よりも損傷変化率は小さいので、 S_{pf1} の値は S_1 より大きい。また、 S_{pf2} を大きくすると、荷重と疲労破壊回数の関係を表す曲線(S-N曲線)のこう配が緩やかになる傾向がある。

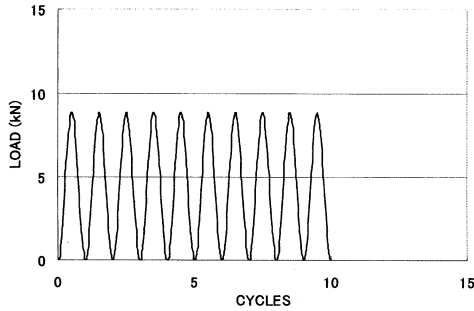


Fig. 7 Cyclic load (case 3)

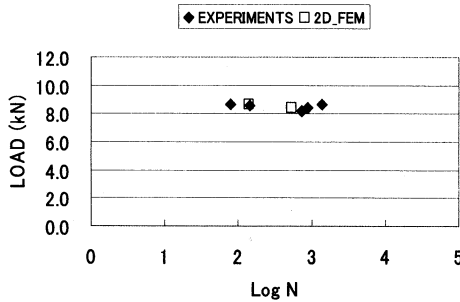


Fig. 8 Load-critical number of cycles relations (case 3)

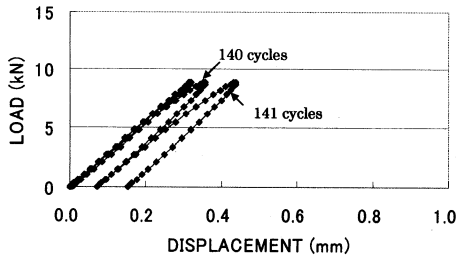


Fig. 9 Load-displacement curve (case 3)

単調載荷付着破壊との相違は、損傷発展方程式を塑性疲労損傷と弾性疲労損傷に分けて定義しているので、損傷に関するパラメータが追加されたこと、疲労限界応力 σ_f を使用することである。すなわち、弾性変形の範囲内であっても、有効相当応力が疲労限界応力 σ_f を超えている場合は、累積相当弾性ひずみに比例して疲労損傷が進展すると仮定している⁽¹⁶⁾。

付着疲労実験および解析では、単調載荷付着実験同様、図1に示す炭素繊維シート上端を鉛直上方向に載荷している。なお、繰返し荷重は片振り載荷であり、周波数は5 Hzである。図7にケース3の繰返し荷重例を示す。

表7および図8に、付着長 L が20 mmのケース3に対する実験ならびに解析結果を示す。実験結果における疲労破壊回数は、実験誤差が大きいと思われる1404サイクルの場合を除き、100サイクル程度から1000サイクル程度に分布している。疲労破壊回数が79サイクルと879サイクルに対応する最大荷重の相違は5%程度であり、小さな荷重変動の範囲内で、100サイクル程度から1000サイクル程度までの疲労破壊回数が生じていることがわかる。他方、解析による疲労破壊回数は、実験結果の79サイクルに対して141サイクル(約1.8倍)、879サイクルに対しては540サイクル(約0.6倍)であり、全体としてはほぼ良好に同

Table 8 Results of fatigue tests and analyses (case 2)

Experiments		Analyses	
Maximum load (kN)	Critical number of cycles	Maximum load (kN)	Critical number of cycles
9.31	5	-	-
9.114	56	8.932	39
8.898	332	8.898	220
8.82	3	-	-
8.786	626	8.786	528
8.649	2,376	-	-

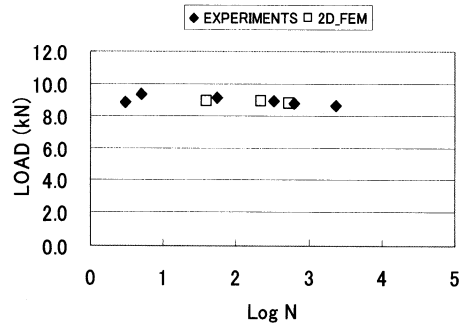


Fig. 10 Load-critical number of cycles relations (case 2)

定されていると考えられる。

図9には、最大荷重が8.831 kNの場合の荷重-荷重点変位曲線を示す。139 サイクル以前の荷重-変位曲線は、ほとんど弾性的な挙動が支配している。しかし、140 サイクル時にメゾクラックが発生すると同時に、剛性が小さくなり、荷重-変位曲線の傾きが低下することがわかる。さらに、き裂が進展するに従って、塑性変形も大きくなる傾向が示されている。なお、き裂が付着長 L 全長にわたって進展するまでの繰返し回数が、構造崩壊する疲労破壊回数であると考えられるので、図9には発生時から疲労破壊回数までを示している。

次に、付着長 L が 40 mm のケース2に対する実験と解析結果を、表8ならびに図10に示す。実験結果は、最大荷重8.82 kNの3サイクルを除いて、ほぼ妥当な結果が得られている。また、解析結果と比較すると、解析の疲労破壊回数のほうが小さくなっているが、対象としている実験結果の最大荷重が9.114 kNから8.786 kNまでであり、4%程度しか相違しておらず、この範囲内で数十サイクルから数百サイクルまでの破壊回数が生じていることを考慮すれば、実験結果に対する解析結果の相対誤差が43%、51%、19%程度に収

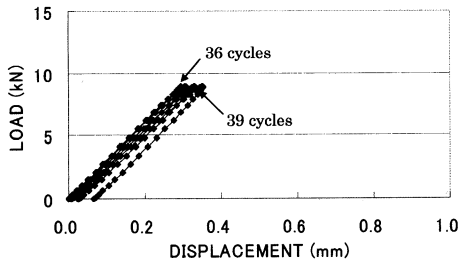


Fig. 11 Load-displacement curve (case 2)

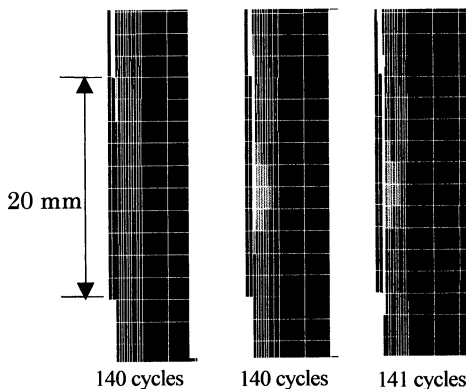


Fig. 12 Damage distribution (case 3)

まっており、両者は良好に対応していると考えてよい。

図11に最大荷重が8.932 kNの場合の荷重-荷重点変位曲線を示す。この場合も、メゾクラック発生以前は弾性変形が支配的であり、き裂発生以後はケース3と同様に、塑性変形が増加する挙動を示した。

コンクリートは脆性的な挙動を示すため、き裂が発生すると同時に急激に伝ばするので、メゾクラック発生時がほぼ疲労破壊回数に相当する。本解析においても、付着長の短いケース3では140 サイクル時にクラックが発生し、141 サイクルには付着長全体にそれが進展している。ただし、ケース2ではケース3の2倍の付着長であるため、クラックが全長に達するまでに、発生からさらに3サイクル要している。この傾向は、破壊回数が大きくなる他の解析ケースにおいても同様であった。なお、本解析では、ケース3、ケース2ともに付着長の全領域にクラックが進展するまでの繰返し回数を、疲労破壊回数として実験結果と対応させている。

図12および図13に、損傷変数の値が限界値 D_{cr} に達した領域の分布を示す。ケース3ならびにケース2ともに付着長の根元にクラックが発生し、鉛直下向きに先端部に向かって進展していくことが理解できる。この現象は、コンクリート表層部のせん断応力が根元部で最大となり、損傷変数が限界値に達して応力開放された結果であると推定できる。さらに、RCはりの下面をFRPシートで補強した部材の付着破壊モデルとも整合している⁽¹⁹⁾。図12と図13は、コンクリート表層部のはく離に伴うき裂進展状況を明確にするため、付着部周辺のみを拡大して図示している。

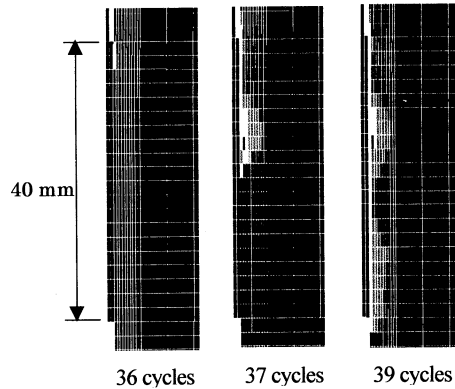


Fig. 13 Damage distribution (case 2)

5. 結 論

本研究では、炭素繊維シートにより補強されたコンクリート構造要素の、重要な破壊モードの一つであるコンクリート表層部のはく離破壊挙動に対し、損傷力学に基づく弾塑性損傷構成式を導入した、二次元有限要素法を適用した。その結果、以下の知見が得られた。

(1) Drucker-Prager, Tresca ならびに最大主応力を組合わせた相当応力を用いた弾塑性損傷構成式は、せん断変形が卓越するコンクリートの単調載荷、ならびに疲労破壊強度を良好に評価することが可能である。

(2) 単調載荷付着破壊については、付着長が長くなると、実験と解析による最大荷重には2倍程度の相違が見られた。しかしながら、付着面積に比例した参照荷重解からの応力集中に起因する低減率の観点からは、実験結果と解析結果は良好に対応した。

(3) 疲労付着破壊については、コンクリートの表層はく離現象を解析的に再現することに成功し、実験結果との比較により、疲労寿命をある程度まで定量的に予測可能であることが示唆された。

(4) 本研究で取上げたコンクリートの表層破壊は、炭素繊維シート破断、炭素繊維シートと接着剤間のはく離、炭素繊維シート層間のはく離などの破壊モードと合わせて、炭素繊維シート補強した脆性体構造要素の重要な技術課題であり、実用的な評価法の提案が望まれている。本研究は合理的な評価法構築の一助となることが期待される。

本研究で引用した炭素繊維シートの単調載荷付着破壊、および疲労付着破壊実験に関する文献の提示を得た日鉄コンポジット(株)に謝意を表す。

文 献

- (1) Lee, H. S. et al., Finite Element Analysis of Effect of CFRP Sheet on Flexural Performance of RC Beam, *Proceedings of the Japan Concrete Institute*, Vol. 18, No. 1 (1996), pp. 1065-1070.
- (2) Liu, Y. et al., Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Members Strengthened with Carbon Fiber Sheets, *Proceedings of the Japan Concrete Institute*, Vol. 20, No. 3 (1998-7), pp. 1-6.
- (3) Murata, K. et al., Mechanic Characteristic of RC beam Strengthened with Carbon Fiber Sheets under dynamic load, *Proceedings of the 47th Science Council of Japan Materials Research Conference*, (2003-10), pp. 29-30.
- (4) Abe, T. et al., Research of Mechanic Characteristic of RC beam Strengthened with CFS and its Rehabilitation Effect, *Proceedings of the 53rd National Congress of Theoretical & Applied Mechanics*, (2004-1), pp. 215-216.
- (5) The Japan Society of Civil Engineers ed., *The guideline of Repair and Reinforcement to Concrete Structures Reinforced with Continuous Fiber Sheet*, (2000), p. 229, The Japan Society of Civil Engineers.
- (6) Yoshizawa, H. et al., Study on FRP-Concrete Interface Bond Performance, *Journal of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol. 49, No. 662 (2000), pp. 105-119.
- (7) Sugiyama, T. et al., The Durability of Carbon Fiber Sheet Composite Materials, *Proceedings of Symposium on Application of Advanced Reinforcing Materials to Concrete Structures JCI Hokkaido Chapter*, (1996-11), pp. 49-56.
- (8) Cipollina, A. et al., A Simplified Damage Mechanics Approach to Nonlinear Analysis of Frames, *Computers and Structures*, Vol. 54, No. 6 (1995), pp. 1113-1126.
- (9) Peng, X. and Meyer, C., A Continuum Damage Mechanics Model for Concrete Reinforced with Randomly Distributed Short Fibers, *Computers and Structures*, Vol. 78, No. 4 (2000), pp. 505-515.
- (10) Al-Gadhib, A. H. and Baluch, M. H., Damage Model for Monotonic and Fatigue Response of High Strength Concrete, *International J. of Damage Mechanics*, Vol. 9 (2000), pp. 57-78.
- (11) Kosaka, Y. et al., Hysteresis of concrete in high compressive strain domain, *Summaries of Technical Papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan*, (1978), pp. 449-450.
- (12) Lee, J. et al., Plastic-Damage Model For Cyclic Loading of Concrete Structures, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, No. 8 (1998), pp. 892-900.
- (13) Tanaka, H. et al., Damage and Failure Analysis of Brittle Structural Elements Reinforced by carbon Fiber Sheet, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 72, No. 716 (2006), pp. 405-411.
- (14) Toi, Y. et al., Element-Size Independent Elasto-Plastic Damage Analysis of Framed Structures, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 67, No. 653 (2001), pp. 8-15.
- (15) Toi, Y. and Lee, J. G., Element-Size Independent Analysis of Elasto-Plastic Damage Behaviors of Framed Structures, *ICCSA2005, Lectures Notes in Computer Science 3483*, (2005), pp. 1055-1064, Springer.
- (16) Lemaitre, J., *A Course on Damage Mechanics, Second Edition*, (1990), p. 95, Springer.
- (17) Tanaka, H. et al., Fatigue Fracture Analysis Of Concrete Structures By Damage Mechanics Model, *The Proceedings of Computational Engineering Conference of JSCEs*, Vol. 10 (2005-7), pp. 555-558.
- (18) Owen, D. R. J., Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, (1980), p. 215, Pineridge Press Limited.
- (19) Zhishen, W. et al., Study on Debonding Failure Load of RC beams Strengthened with FRP Sheets, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 46 A (2000), pp. 1431-1441.