

# 分散性を任意次数まで考慮した 高次 Boussinesq 方程式の一般形について

金山 進\*・田中 仁\*\*・首藤伸夫\*\*\*

## 1. はじめに

鉛直積分型の非線形分散波浪モデルは波浪変形予測において今後ますます重要な役割を担うことが予想される。その精度向上は如何にして流速の鉛直分布を適切に表現するかという問題に帰着され、複数の鉛直モードを重ね合わせるもの（灘岡・中川，1993；磯部，1994；後野，1994 など）や多層モデル（金山，1997）などの多成分連成型の波動モデルが提案され、高い精度を有することが示されている。鉛直積分型の波動モデルに場の鉛直特性を反映させるもう一つの手段として Boussinesq タイプの長波モデルに対して近似オーダーを上げる方法があり、これらは従属変数が代表流速と水位の2つのみであるという利点を有している。Nwogu (1993) に代表される任意深度の水平流速を用いた長波近似モデルの検討が近年盛んに行われており、これまでに喜岡・柏原 (1995) や Gobbi・Kirby (1996) などにより分散性を表すパラメータ  $\sigma$  (相対水深の2乗) を2次のオーダーまで考慮した高次 Boussinesq 方程式が提案されているが、本研究では、この展開をパラメータ  $\sigma$  に対する任意次数まで拡張した高次 Boussinesq 方程式の一般形表示を提案するとともにその特性を検討した。

## 2. 高次 Boussinesq 方程式の導出

### (1) 無次元化

完全流体の鉛直2次元非回転運動を対象とする。時間  $t'$ 、水平座標  $x'$  および静水面を0として上向きにとった鉛直座標  $z'$  を独立変数とし、水位変動  $\eta'$ 、水平流速  $u'$  および鉛直流速  $w'$  を従属変数とし、代表水深  $h_0$ 、代表波長  $L_0$ 、代表振幅  $a_0$ 、代表波速  $c_0(=gh_0)^{1/2}$  および重力加速度  $g$  を用いて、Nwogu (1993) と同様に式 (1) のように無次元化する。ただし、右肩に'の付されたものが有次元量、付されないものが無次元量である。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x'}{L_0}, z = \frac{z'}{h_0}, t = \frac{c_0}{L_0} t' \\ u &= \frac{h_0}{a_0 c_0} u', w = \frac{h_0^2}{a_0 L_0 c_0} w', \eta = \frac{1}{a_0} \eta' \\ h &= \frac{1}{h_0} h', p = \frac{1}{\rho g a_0} p' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

これらの無次元量を用いて完全流体の連続式、渦無し  
の条件、自由水面における運動学および力学的境界条件、海底条件を表示すると次の式 (2)~(6) のようになる。

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$w_s = \sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} + \delta \sigma u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{z=\sigma\eta} + \delta \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{z=\sigma\eta} + \delta u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} \\ + \frac{\delta}{\sigma} w_s \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (5) \end{aligned} \right\}$$

$$w_b = -\sigma u_b \frac{\partial h}{\partial x} \dots\dots\dots (6)$$

また、式 (4) および式 (6) を用いて式 (2) を海底から自由水面まで積分すると式 (7) が得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\sigma\eta} u dz = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\sigma(=(h_0/L_0)^2)$  および  $\delta(=a_0/h_0)$  は分散性および非線形性の指標となるパラメータであり、 $u_s$  および  $w_s$  はそれぞれ自由水面における水平流速および鉛直流速であり、 $u_b$  および  $w_b$  は海底におけるものである。

以下の展開においては任意近似度の流速表示を用いて式 (7) および式 (5) を表現することにより目的とする任意次数高次 Boussinesq 方程式の連続式および運動方程式を導く。

### (2) 流速場の表示

$\sigma^N$  までを含む水平流速  $u_N$  に以下の表示を仮定する。

$$u_N = \sum_{n=0}^N \sigma^n \sum_{m=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n} A_{n,m,k} \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} (h+z)^k \dots\dots\dots (8)$$

\* 正会員 博(工) 五洋建設(株)技術研究所  
\*\* 正会員 工 博 東北大学 大学院  
\*\*\* 正会員 工 博 岩手県立大学 総合政策学部

係数  $A$  の添え字  $n, m, k$  はそれぞれ  $\sigma$  の次数, 代表流速の空間微分階数,  $(h+z)$  の  $\sigma$  数に対応している。  $u_a$  は高次 Boussinesq 方程式の従属変数となる流速であり, 以下のように  $M$  個の深度  $\{z_{ai}\}$  における流速  $\{u(z_{ai})\}$  の線形和として定義する。

$$u_a = \sum_{i=1}^M \beta_i u_{N+1} \Big|_{z=z_{ai}}, \sum_{i=1}^M \beta_i = 1 \dots\dots\dots (9)$$

Nwogu (1993) や喜岡・柏原 (1995) は単一の代表深度を用いたが Gobbi・Kirby (1996) は  $\sigma^2$  までを考慮した方程式の線形分散関係式を微小振幅波理論のものを相対水深  $kh$  の有理式で表した場合の (4, 4) padé 近似に一致させるため 2 つの代表深度を導入している。ここで提案する高次 Boussinesq 方程式においてもこの考え方に倣い複数の代表深度を導入した。

式 (8) で表示される  $\sigma^N$  のオーダーの流速  $u_N$  から  $\sigma$  の次数の一つ上がった流速を求め, 係数  $A_{n,m,k}$  に対する漸化式を得る。まず, 海底条件 (6) を用いて連続式 (2) を海底から鉛直方向に積分して得られる以下の関係より  $\sigma^{N+1}$  のオーダーの鉛直流速  $w_{N+1}$  を求める。

$$w_{N+1} = -\sigma \int_{-h}^z \frac{\partial u_N}{\partial x} dz - \sigma u_N \Big|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} \dots\dots\dots (10)$$

この積分を実行して  $w_{N+1}$  は (11) で与えられる。

$$w_{N+1} = -\sum_{n=0}^N \sigma^{n+1} \sum_{m=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{n,m,k} \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} \frac{(h+z)^{k+1}}{k+1} \right) \right] \dots\dots\dots (11)$$

次に, 渦無し条件 (3) を海底から鉛直方向に積分し,  $\sigma^{N+1}$  のオーダーまでを含む水平流速  $u_{N+1}$  は以下のように与えられる。

$$u_{N+1} = -\int_{-h}^z \frac{\partial w_{N+1}}{\partial x} dz + u_b \dots\dots\dots (12)$$

この積分を実行した上で  $u_a$  の定義式 (9) より海底流速  $u_b$  を消去すると  $u_{N+1}$  は改めて式 (13) によって表される。

$$u_{N+1} = u_a - \sum_{n=0}^N \sigma^{n+1} \sum_{m=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \left[ \left( \frac{\partial^2 A_{n,m,k}}{\partial x^2} \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} + 2 \frac{\partial A_{n,m,k}}{\partial x} \frac{\partial^{m+1} u_a}{\partial x^{m+1}} + A_{n,m,k} \frac{\partial^{m+2} u_a}{\partial x^{m+2}} \right) \times \frac{(h+z)^{k+2} - \Gamma_{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \left( 2 \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial A_{n,m,k}}{\partial x} \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} + A_{n,m,k} \frac{\partial^{m+1} u_a}{\partial x^{m+1}} \right) + A_{n,m,k} \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \times \frac{(h+z)^{k+1} - \Gamma_{k+1}}{k+1} - \sum_{n=0}^N \sigma^{n+1} \sum_{m=0}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} A_{n,m,k} \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \{ (h+z)^k - \Gamma_k \} \right] \dots\dots\dots (13)$$

$u_{N+1}$  の表示式 (13) と  $u_N$  の表示式 (8) について  $u_a$  の

微分回数  $m$  および  $(h+z)$  のべき乗数  $k$  毎に係数を比較整理すると係数  $A_{n,m,k}$  に関する漸化式が以下のように得られる。ただし, 係数  $A_{0,0,0}$  は 1 である

$$A_{n,m,k} = -A_{n-1,m,k} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{k} \left( 2A_{n-1,m-1,k-1} \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial A_{n-1,m,k}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + A_{n-1,m,k-1} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{k(k-1)} \left( \frac{\partial^2 A_{n-1,m,k-2}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial A_{n-1,m-1,k-2}}{\partial x} + A_{n-1,m-2,k-1} \right) \quad (\text{for } k \neq 0) \dots\dots (14)$$

$$A_{n,m,0} = -\sum_{p=1}^{2n} A_{n,m,p} \Gamma_p \quad (\text{for } k=0) \dots\dots (15)$$

**(3) 連続式および運動方程式**

係数  $A_{n,m,k}$  の漸化式 (14), (15) とこれを用いた水平流速および鉛直流速の表示式 (8), (11) によって  $\sigma$  の任意次数まで分散性の効果を考慮した流速場が表現できるがこれによって式 (7) および (5) を表示して  $\sigma$  の  $N$  乗のオーダーまでを考慮した高次 Boussinesq 方程式の連続式 (16) と運動方程式 (17) が得られる。連続式に空間  $2N+1$  階, 運動方程式には空間  $2N$  階・時間 1 階までの高階の微分項が含まれる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{n=0}^N \sigma^n \sum_{m=0}^{2n} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} C_{n,m} \right) = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_a}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & + \delta \sum_{n=0}^N \sigma^n \sum_{p=0}^n \left[ \sum_{m=0}^{2(n-p)} \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} B_{n-p,m} \right. \\ & \times \left. \sum_{m=0}^{2p} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} B_{p,m} \right) \right] \\ & + \delta \sum_{n=1}^N \sigma^n \sum_{p=0}^{n-1} \left[ \sum_{m=0}^{2(n-1-p)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} C_{n-1-p,m} \right) \right. \\ & \times \left. \sum_{m=0}^{2p} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^m u_a}{\partial x^m} C_{p,m} \right) \right] \\ & = -\sum_{n=1}^N \sigma^n \sum_{m=0}^{2n} \frac{\partial^{m+1} u_a}{\partial t \partial x^m} B_{n,m} \\ & + \delta \sum_{n=0}^{N-1} \sigma^{n+1} \sum_{m=0}^{2n} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^{m+1} u_a}{\partial t \partial x^m} C_{n,m} \right) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここで, 係数  $B_{n,m}, C_{n,m}$  以下のように与えられる。

$$B_{n,m} = \sum_{k=0}^{2n} A_{n,m,k} (h+\delta\eta)^k \dots\dots\dots (18)$$

$$C_{n,m} = \sum_{k=0}^{2n} A_{n,m,k} \frac{(h+\delta\eta)^{k+1}}{k+1} \dots\dots\dots (19)$$

これに対して水平床を仮定すると基礎方程式は簡潔になり, 連続式が (20), 運動方程式が (21) で表される。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{n=0}^N \sigma^n \frac{\partial^{2n} u_a}{\partial x^{2n}} \sum_{m=0}^n \frac{a_{n,m}}{2m+1} (h+\delta\eta)^{2m+1} \right] = 0 \dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_a}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{n=0}^N \sigma^n \sum_{m=0}^n \frac{\partial^{2m} u_a}{\partial x^{2m}} \frac{\partial^{2(n-m)} u_a}{\partial x^{2(n-m)}} b_m b_{n-m} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{n=1}^N \sigma^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial^{2m-1} u_a}{\partial x^{2m-1}} \frac{\partial^{2(n-m)+1} u_a}{\partial x^{2(n-m)+1}} c_m c_{n+1-m} \right) \\ & = - \sum_{n=1}^N \sigma^n \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^{2n} u_a}{\partial t \partial x^{2n-1}} \sum_{m=0}^n a_{n,m} (h + \delta \eta)^{2m} \right] \dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで、係数  $a$  は非水平床の場合の係数  $A$  によって式 (22) のように表され、係数  $b, c$  は式 (23) および式 (24) で表される。

$$a_{n,m} = A_{n,2n,2m} \dots\dots\dots (22)$$

$$b_n = \sum_{m=0}^n a_{n,m} (h + \delta \eta)^{2m} \dots\dots\dots (23)$$

$$C_n = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{a_{n-1,m}}{2m+1} (h + \delta \eta)^{2m+1} \dots\dots\dots (24)$$

係数  $a_{n,m}$  を  $n$  および  $m$  が 0 ~ 4 の範囲で表-1 に示す。ここに示された一般形表示は  $\sigma$  の最高ベキ数  $N$  が 1 の場合に Wei・Kirby (1995) のモデル、 $N=2$  で Gobbi・Kirby (1996) のモデルに一致する。また、この表示では分散性のパラメタ  $\sigma$  の次数に応じた項の打ち切りは行っているものの、非線形性のパラメタ  $\delta$  に対しては打ち切りを行っていないが、アーセル数  $U_r$  が 1 のオーダーであると仮定して  $\delta$  と  $\sigma$  のベキ数の和が  $N$  を超える項に対して打ち切りを行った場合には、 $N=1$  で Nwogu (1993) のモデル、 $N=2$  で喜岡・柏原 (1995) のモデルに一致する。

**3. 高次 Boussinesq 方程式の特性**

高次 Boussinesq 方程式に対して、Nwogu (1993) や Gobbi・Kirby (1996) などと同様、線形分散特性および周波数の異なる 2 つの成分波の 2 次非線形干渉に関する精度を検討する。水位  $\eta$  および水平流速  $u_a$  に対して 2 つの周波数 ( $\omega_1, \omega_2$ ) およびこれらの 2 次干渉で生じる項からなる式 (25) の形の解を仮定する。 $\epsilon$  は微小量であり、1 次の成分には  $\epsilon$  が、2 次の成分には  $\epsilon^2$  が乗じられている。

$$\begin{aligned} f = & \epsilon f^{(1)} \cos \psi_1 + \epsilon f^{(2)} \cos \psi_2 \\ & + \epsilon^2 f^{(21)} \cos 2\psi_1 + \epsilon^2 f^{(22)} \cos 2\psi_2 \\ & + \epsilon^2 f^{(2+)} \cos \psi_+ + \epsilon^2 f^{(2-)} \cos \psi_- \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ここで、 $f$  は  $\eta$  または  $u_a$  であり、 $f^{(1)}$  および  $f^{(2)}$  は周波数  $\omega_1$  および  $\omega_2$  の 1 次成分、 $f^{(21)}$  および  $f^{(22)}$  はそれぞれの倍周波数成分であり、 $f^{(2+)}$  および  $f^{(2-)}$  は superharmonics (和の波) および subharmonics (差の波) の成分である。各項の位相関数は以下の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= k_1 x - \omega_1 t, \psi_2 = k_2 x - \omega_2 t, \\ \psi_{\pm} &= (k_1 \pm k_2) x - (\omega_1 + \omega_2) t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

式 (25) の形の解を水平床の基礎方程式 (20) および (21) を有次元に戻したものに代入し、 $\epsilon$  のベキ数毎に整理して得られる関係式から高次 Boussinesq 方程式の特性について検討する。

**(1) 線形分散特性**

$\epsilon$  のオーダーについて整理し、2 つの周波数が等しいと仮定すると  $f^{(1)} (= f^{(2)})$  に対する同次型の代数方程式が得られるが、これが自明でない解を持つ条件から高次 Boussinesq 方程式の線形分散関係式が以下のように与えられる。

$$\frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{1 + \sum_{n=1}^N (-1)^n k^{2n} \sum_{m=0}^n \frac{a_{n,m}}{2m+1} k^{2m}}{1 + \sum_{n=1}^N (-1)^n k^{2n} \sum_{m=0}^n a_{n,m} h^{2m}} \dots\dots (27)$$

これを微小振幅波理論の線形分散関係式に対する相対水深  $kh$  による padé 近似と比較すると、 $N=1$  の場合には  $\Gamma_2/h^2$  を  $1/5$  とすれば (2, 2) padé 近似に、 $N=2$  の場合には  $\Gamma_2/h^2$  を  $1/9, \Gamma_4/h^4$  を  $5/189$  とすれば (4, 4) padé 近似に、 $N=3$  の場合には  $\Gamma_2/h^2$  を  $1/13, \Gamma_4/h^4$  を  $0.01452, \Gamma_6/h^6$  を  $0.004207$  とすれば (6, 6) padé 近似にそれぞれ一致することがわかる。 $N=1$  に相当する Nwogu (1993) が、ここでの表示に基づけば、 $\Gamma_2/h^2$  を  $0.22$  とすることを提案したり、 $N=2$  を対象とした喜岡・柏原 (1995) は  $\Gamma_2/h^2$  を  $0.1406, \Gamma_4/h^4$  を  $0.0198$  とすることを推奨したりしている例があり、Abohadima ら (1998) は対象とする周波数帯に応じて最適な分散特性を与える方法を提案している。このように方程式の線形分散特性を線形理論の padé 近似に整合させることが必ずしも最適とはいえないが、本研究においては  $\sigma^N$  のオーダーまでを含む高次 Boussinesq 方程式の分散特性は線形理論に対する  $(2N, 2N)$  padé 近似に整合するように

表-1 係数  $a_n$  および  $m$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
0	1				
1	$\Gamma_2/2$	$-1/2$			
2	$(6\Gamma_2^2 - \Gamma_4)/24$	$-\Gamma_2/4$	$1/24$		
3	$(90\Gamma_2^3 - 30\Gamma_2\Gamma_4 + \Gamma_6)/720$	$-(6\Gamma_2^2 - \Gamma_4)/48$	$\Gamma_4/48$	$-1/720$	
4	$(2520\Gamma_2^4 - 1260\Gamma_2^2\Gamma_4 + 56\Gamma_2\Gamma_6 + 70\Gamma_2^2 - \Gamma_8)/40320$	$-(90\Gamma_2^3 - 30\Gamma_2\Gamma_4 + \Gamma_6)/1440$	$(6\Gamma_2^2 - \Gamma_4)/576$	$-\Gamma_2/1440$	$1/40320$

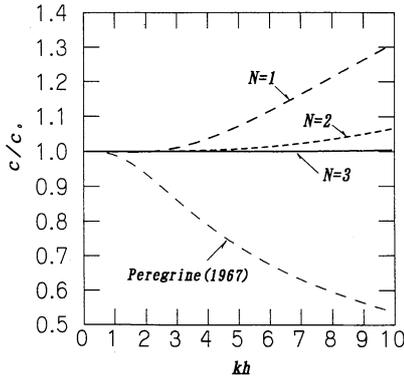


図-1 線形分散特性

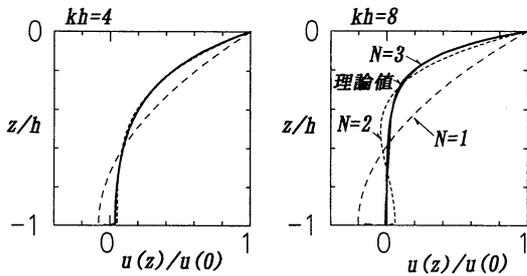


図-2 線形水平流速の鉛直分布

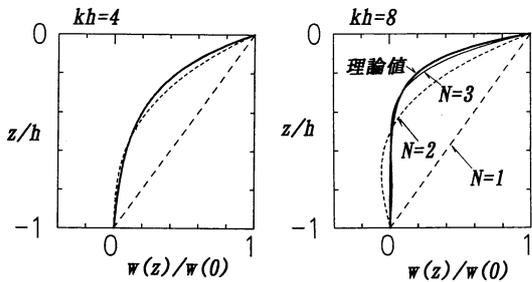


図-3 線形鉛直流速の鉛直分布

設定して以下の検討を行う。

なお、式(9)の定義によれば同じ値の係数  $\Gamma_n$  を設定するのに代表深度  $\{z_{ai}\}$  および重み係数  $\{\beta_i\}$  の複数の組み合わせが存在するが、係数  $\Gamma_n$  が同じであれば方程式は全く同一のものであることは明らかである。

高次 Boussinesq 方程式の分散特性、すなわち線形理論に対する padé 近似の精度を整理したものが図-1 であり、波速  $c$  の比率 ( $c_0$  は線形理論による波速) で表示している。  $N$  の増加に伴う線形分散関係の精度の向上が確認できる。

このように分散特性を調整した上で水平流速(8)および鉛直流速(11)の鉛直分布を微小振幅波理論と比較したものが図-2 および図-3 である。分散特性と同様、

$kh=4$  程度までであれば  $N=2$  で十分な精度を示し、 $N=3$  に至っては  $kh=8$  の高波数域でも整合性が高い。

(2) 2次の非線形干渉

$\epsilon^2$  のオーダーについて整理し、 $\sin\phi_{\pm}$  の係数をまとめて得られる線形代数方程式より  $\eta^{(2\pm)}$  および  $u_a^{(2\pm)}$  が与えられるが、これを用いて高次 Boussinesq 方程式の2次の伝達関数  $G_{\pm}$  は以下のように表される。

$$G_{\pm}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\eta^{(2\pm)}}{\eta^{(11)}\eta^{(12)}} \dots\dots\dots(28)$$

superharmonics  $G_+$  および subharmonics  $G_-$  の2次伝達関数の Dean・Sharma (1981) の理論解  $G_{0\pm}$  に対する比率を相対水深  $kh$  の関数として表したものが図-4 および図-5 である。横軸の  $kh$  は  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の平均周波数に対するものであり、 $\omega_1$  に対する波数  $k_1$  を  $\omega_2$  に対する  $k_2$  の1.2倍に設定し、 $\eta^{(11)}/h$ 、 $\eta^{(12)}/h$  ともに0.1としている。

図-4 の superharmonics (和の波) に対する結果によれば、 $N$  の増加とともに精度が向上し、 $N=3$  の場合には  $kh=8$  付近の高波数域まで誤差は1割に収まっている。一方、subharmonics (差の波) に対する図-5 では、 $N=2$  の場合に  $kh$  が1.5付近まで、 $N=3$  では2.0付近まで

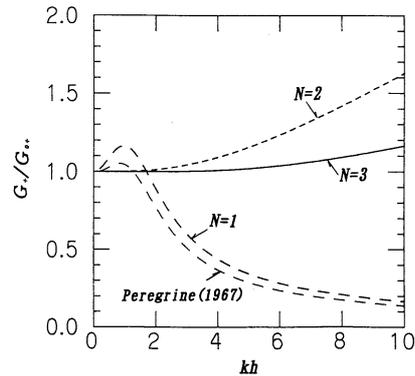


図-4 2次非線形干渉特性 (superharmonics)

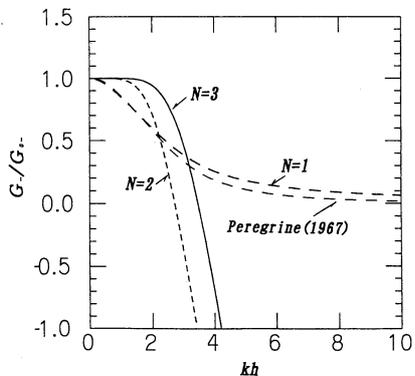


図-5 2次非線形干渉特性 (subharmonics)

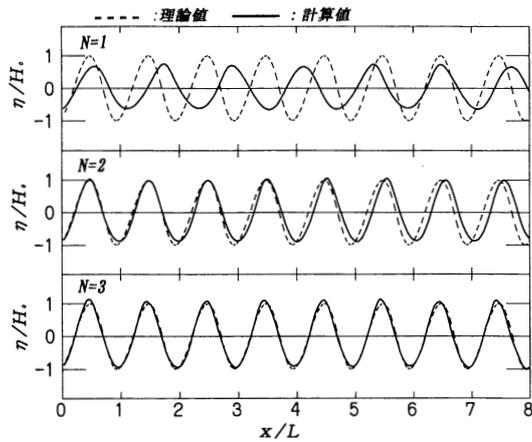


図-6 高波数域 ( $kh=6.0$ ) における水平床伝播計算

は良好な精度を示すものの、それよりも高波数域では急激に精度が損なわれ、符号の逆転が生じている。これに関しては  $N=2$  に対する Gobbi・Kirby (1996) も同様の結論を示している。これによれば、実際には set-down が生じるところをモデルでは set-up を与えてしまう場合が生じることになり、ここで採用した系統の高次 Boussinesq 方程式が有する問題の一つといわざるを得ない。

#### 4. 数値計算

高次 Boussinesq 方程式が高波数域まで適用性を拡張されたものであることを数値モデルの上でも確認するため、 $N=3$  までを対象に水平床での伝播計算を行う。

数値計算には差分法を用いる。トーマスアルゴリズムを有効に使うため、代表流速  $u_a$  に加えてこの偶数階空間微係数も従属変数とする方法を採用する。今回は、 $N=3$  までを対象とするので水位以外に 4 つの未知数を連立させて解くことになる。空間微分に由来する打ち切り誤差項については、方程式中に現れる項の最高微分階数よりも低次のものが消えるように補正項を加えた。ただし、時間微分に由来する打ち切り誤差については便宜的に線形波の仮定に基づき空間導関数に置き換えて空間差分の中で処理した。

図-6 は、相対水深  $kh=6.0$  の高波数条件での伝播計算の結果である。Stokes 第 3 次近似解の流速を入力し、空間波形を理論解と比較したものであり、計算値が実線、理論値が破線である。入射波高  $H_0$  は水深の  $1/20$  という条件である。

$N=1$  の場合は位相、振幅にかなりの誤差が認められ、

$N=2$  の場合でも伝播速度が過大、波谷深が過小という傾向が認められる。 $N=3$  では波頂高の過大評価、波谷深の過小評価がわずかに認められるものの良好な一致を示しており、 $\sigma$  の次数の増加とともに精度が向上していることが確認される。

#### 5. おわりに

分散性に関するパラメータ  $\sigma$  を任意次数まで考慮した高次 Boussinesq 方程式を導出してその特性を検討した。 $\sigma$  の次数の増加とともに分散特性および superharmonics の 2 次非線形干渉に対する精度は向上するが、subharmonics に関しては高波数域で符号の逆転に至るまで精度を損なうという問題も認められた。数値計算方法における高階微分の扱いの問題、次数の増大とともに項数が飛躍的に増加するという問題を考慮すると  $\sigma$  以上の精度を求める場合には近年盛んに研究が進められている多成分連成型の波動モデルに期待する部分が多い。

#### 参考文献

- 磯部雅彦 (1994): 非線形緩勾配方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 1-5.
- 金山 進 (1997): 強分散性非線形平面波浪場に対する多層モデルの提案, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp. 41-45.
- 喜岡 渉・柏原謙爾 (1995): 高次 Boussinesq 方程式とそのステップ地形への適用性, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 166-170.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993): 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 6-10.
- 後野正雄 (1994): 強非線形平面不規則波動場に対する連成振動方程式とその基礎的特性, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 16-20.
- Abohadima, S.・余 錫平・磯部雅彦 (1998): 非線形波理論の最適分散特性について, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp. 6-10.
- Dean, R. G., and J. N. Sharma (1981): Simulation of wave systems due to nonlinear directional spectra, Proc. Int. Symp. on Hydrodyn. in Oc. Engrg., Norwegian Hydrodynamics Laboratory, Trondheim, Norway, pp. 1211-1222.
- Gobbi, M. F., and J. T. Kirby (1996): A fourth order Boussinesq-type wave model, Proc. 25 th I. C. C. E., pp. 1116-1129.
- Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 119, No. 6, pp. 618-638.
- Wei, G. and J. T. Kirby (1995): A Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations, J. Waterway, Port, Coastal, & Ocean Eng., ASCE, Vol. 121, No. 5, pp. 251-261.

