

A型CIP法との比較に基づくエルミート完全3次要素による移流計算精度の検証

金山 進¹・奥村 弘²

¹正会員 五洋建設(株) 技術研究所 (〒329-2746 栃木県那須塩原市四区町1534-1)
E-mail:susumu.kanayama@mail.penta-ocean.co.jp

²正会員 富山大学 総合情報基盤センター (〒930-8555 富山県富山市五福3190)
E-mail: okumura@itc.u-toyama.ac.jp

エルミート完全3次要素の導入は、移流計算に高い精度を有するCIP法を非構造格子へ展開する方法の一つである。2次元問題においては三角形を用いて計算領域を分割するため、海域における波、流れ、物質移動に対する数値解析において複雑な境界条件下での適用性が期待できるが、移流計算の精度自体についても構造格子のものとの比較に基づいて把握するため、平面問題を対象とした検討を行った。矩形格子を対角線で2つのエルミート完全3次三角形要素に分割したスキームを用いてガウシアン型の初期条件に対する移流計算およびノイマンの方法による安定性解析を行い、平面問題におけるCIP法の基本形といえるA型CIP法との比較を行った。三角形要素は流れが境界線と平行に近づくとき精度が低下するという特性を有しているが、それ以外の条件では、格子間隔を半分にした矩形格子のモデルに迫る精度を示した。

Key Words : CIP, Hermite element, complete cubic polynomial, advection equation, stability analysis

1. はじめに

海域における現象を取り扱う数値解析においては、流れによる運動量、エネルギーあるいは浮遊態・溶存態の物質の移動、すなわち移流過程が含まれることが多い。この移流過程の数値解析においては離散化に伴って数値粘性や数値分散といった誤差が発生することが知られている。これによる運動量の過剰拡散は、波や流れの減衰を実際よりも大きく評価してしまうことにつながる。また、数値分散による見かけ上の振動は計算の安定性を損なう原因となることが多い上に計算結果そのものの誤差に結びつく。物質濃度の移流計算における過剰拡散は、例えば海上工事に伴う濁りの予測については影響の過小評価につながる危険を伴う。また、数値分散による誤差は負の濃度の発生という物理的な矛盾を引き起こし、生態系モデルなど複雑な連鎖過程を含む解析においては、その破綻に結びつくことも生じ得る。さらに、水温・塩分など、密度変化をもたらす諸量の過剰拡散は、密度成層の安定を損ない、解析の精度を著しく損なう原因となり得る。

このように、海域を対象とした数値解析においては、高い精度で移流計算を行うことは極めて重要な課題である。

移流計算に高い精度を有する手法の一つにCIP法¹⁾があり、広く用いられるとともに今なお発展を続けている。非構造格子への展開もその発展の方向性の一つであり、CIVA法²⁾や奥村・丸岡³⁾のようなエルミート完全3次要素による移流計算などが挙げられる。これらは平面問題においては三角形、3次元問題においては四面体を用いて計算領域を分割するため、複雑な境界形状の表現などにおいて有利であるが、移流計算の精度自体についても構造格子のものとの比較に基づいて把握しておくことが望ましい。本研究は、平面問題におけるエルミート完全3次三角形要素による移流計算精度について、構造格子のCIP法の基本形といえるA型CIP法との比較に基づいて検討したものである。

2. エルミート完全3次三角形要素について

本研究においては、定常な一様流速の下でのスカラー量Sの移流を表わす式(1)を対象とする。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

ここで、 t : 時間、 (x, y) : 水平2方向の座標、 (u, v) :

(x, y)方向の流速である. この解は, 形を変えずに伝わって行く関数形であるので, 式(1)を数値的に解くという問題は, ある場所での時間ステップn+1での関数値は時間ステップnの時はどこにあったかという問題に置き換えることができる.

格子点 (i, j) における時間ステップn+1における関数値 $S^{n+1}_{i, j}$ は, 時間刻みを Δt として, $(-u\Delta t, -v\Delta t)$ だけ流れの上流に遡った位置での時間ステップnにおける関数値ということになるが, この位置は格子点ではないのが一般的であり, ここでの関数値は周辺の格子点での値から補間などで求めることになる. これを線形補間で行ったものが風上差分, 2次補間で行ったものがLax-Wendroff法, 3次補間で行ったものがQuickest法と考えることができる. 周辺の格子点における関数値そのものを用いて前ステップ上流点の値を補間する方法については, 1次元問題に限ってではあるが一般形も示されている(例えば, 金山ら⁴⁾).

これに対して, CIP法は上流点での値の補間において関数値そのものだけではなく, その微分値も用いることを特徴の一つとしており, 関数値の微分値も従属変数として取り扱われる. CIP法は様々な工夫によって多くの発展形が開発されているが, ここで扱うA型CIP法はこれの中で最も基本的なものの一つであり, 平面問題について簡単にまとめると以下のとおりである.

従属変数 S を以下のように求値格子点(i, j)を原点とする座標系(X, Y)での3次多項式で表わす.

$$S(X, Y) = a_1 X^3 + a_2 Y^3 + a_3 X^2 Y + a_4 X Y^2 + a_5 X^2 + a_6 Y^2 + a_7 X Y + a_8 X + a_9 Y + a_{10} \quad (2)$$

これより, 微分係数 $\partial_x S$ および $\partial_y S$ はそれぞれ以下の2次多項式で表わされる.

$$\partial_x S(X, Y) = 3a_1 X^2 + 2a_3 X Y + a_4 Y^2 + 2a_5 X + a_7 Y + a_8 \quad (3)$$

$$\partial_y S(X, Y) = 3a_2 Y^2 + a_3 X^2 + 2a_4 X Y + 2a_6 Y + a_7 X + a_9 \quad (4)$$

これらの多項式には $a_1 \sim a_{10}$ の合計10個の未定係数が含まれ, これらを決定するには10個の条件式が必要となる. A型CIP法では, 図-1(a)に示すように上流点を含む計算セルにおいて求値格子点(i, j)およびこれに隣接する2つの格子点の3点で関数値および2方向の微分値を規定することによって9個の条件を与え, 求値格子点に対して対角正面にあたる格子点において関数値のみを規定することで条件を1つ加えて10個の条件を完備する. すなわち, いずれの格子点においても関数値および2方向の微分値が定義, 更新される.

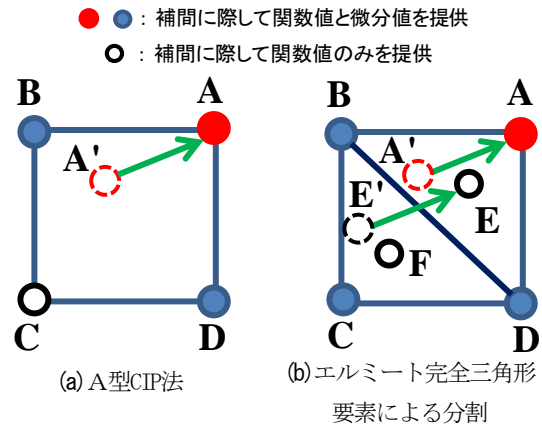


図-1 上流点補間のイメージ

これに対して, エルミート完全3次三角形要素では, 三角形の3つの頂点において関数値および2方向の微分値を規定して9個の条件を与え, 残り1つは三角形の重心における関数値を規定することによって与える. したがって, 三角形の重心においては, 微分値を定義, 更新する必要はない. 今回は矩形格子に対するA型CIP法との比較のため, 図-1(b)に示すように, 対角線によりセルを2つの三角形要素に分割したものに対して検討を行った. エルミート完全3次三角形要素の場合, 補間に用いる三角形は必ずしも求値格子点(i, j)を頂点の一つとして含む必要はない. A型CIP法も三角形要素も流向に応じて補間に用いる格子または三角形を使い分ける点は同じであるが, A型CIP法では係数決定において各格子点が担う役割も異なってくるのに対して, 三角形要素では頂点が関数値と微分値の条件, 重心は関数値の条件のみを提供するという点は流向によらず一貫している. 今回は, 矩形を分割する対角線が左上から右下に向かうタイプのものを対象とするが, 左下から右上に向かう対角線で分割した場合には, ここで得られた結果をx軸またはy軸に対して反転させたものとなる.

3. 数値実験による検討

エルミート完全3次三角形要素とA型CIP法に対して, 平面2次元のガウシアン型の初期条件に対する移流計算結果を比較した. 図-1のような分割では, 1つの矩形格子に2つの三角形要素が含まれるため, 単純な比較は難しい. そこで, A型CIP法については格子間隔を半分にした場合も検討した.

格子幅の0.8倍を標準偏差とし, 最大値を1とするガウシアン型の初期条件に対する移流計算結果を図-2から図-5に示す. エルミート完全3次三角形要素による計算結果を平面図で示したものが図-2であり, 三角形要素の短

辺と同じ格子間隔のA型CIP法に対するものが図-3, その半分の格子間隔のA型CIP法に対するものが図-4である.

図-5は, これらの結果を断面で比較したものであり, x軸あるいはy軸のうち, 流向と平行に近いものに対して示している. いずれも100ステップ経過後の結果であり, 円錐状の初期条件に対する値の減衰および変形状況に基づいて計算の精度を論ずることができる.

流れの向きによる特性に着目し, x方向, y方向のクーラン数 $C_x (=u\Delta t/\Delta x)$, $C_y (=v\Delta t/\Delta y)$ を変化させて検討したところ, A型CIP法は4つの象限毎に同じ結果と

なり, エルミート完全3次三角形要素のものは原点に対して点対称となることが判明したので, 図のような流向を選択して示した.

いずれの計算手法も, 同じ象限内では対角線に対して線対称となっており, $(0.4, 0.2)$ の結果は $(0.2, 0.4)$ の結果に対してx軸とy軸を入れ替えたものと同じであり, $(-0.2, 0.4)$ の結果と $(-0.4, 0.2)$ の結果も同様の関係となっている.

流れがx軸およびy軸と平行な場合には短辺と同じ長さの格子間隔のA型CIP法とエルミート完全3次三角形要素

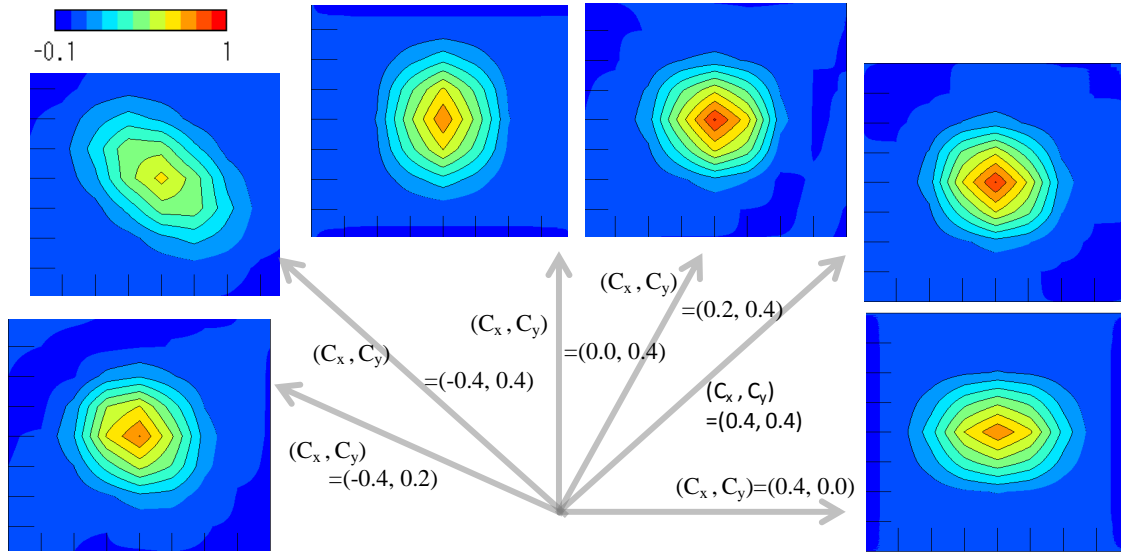


図-2 エルミート完全3次三角形要素による移流計算の結果

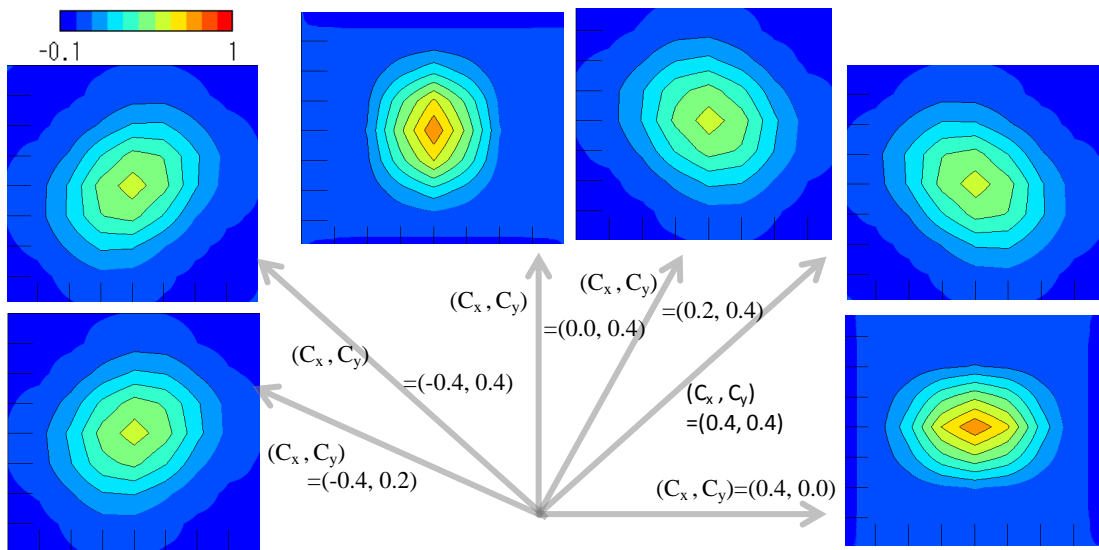


図-3 三角形要素の短辺と同じ格子幅のA型CIP法による移流計算の結果

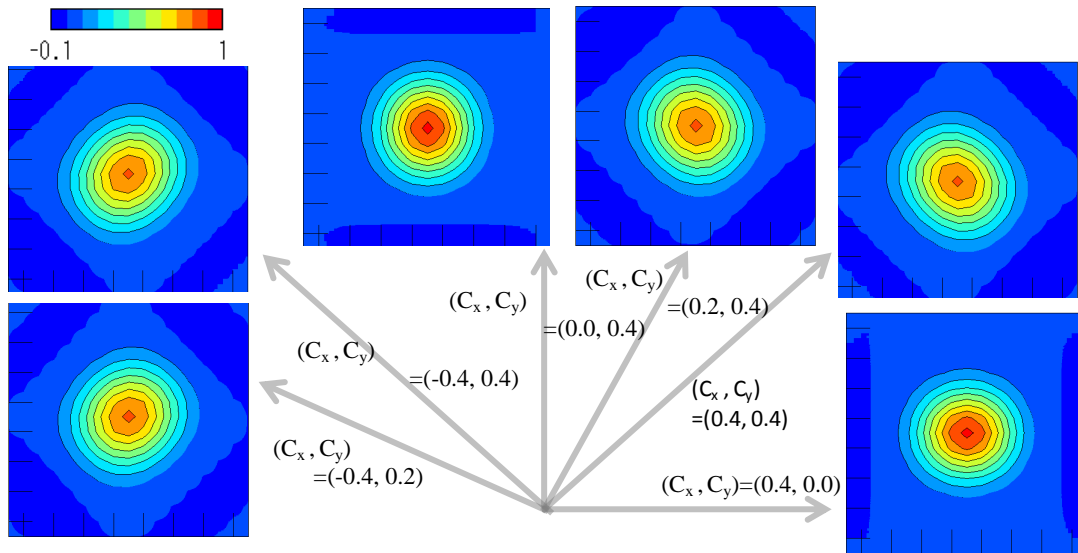


図4 三角形要素の短辺の半分の格子幅のA型CIP法による移流計算の結果

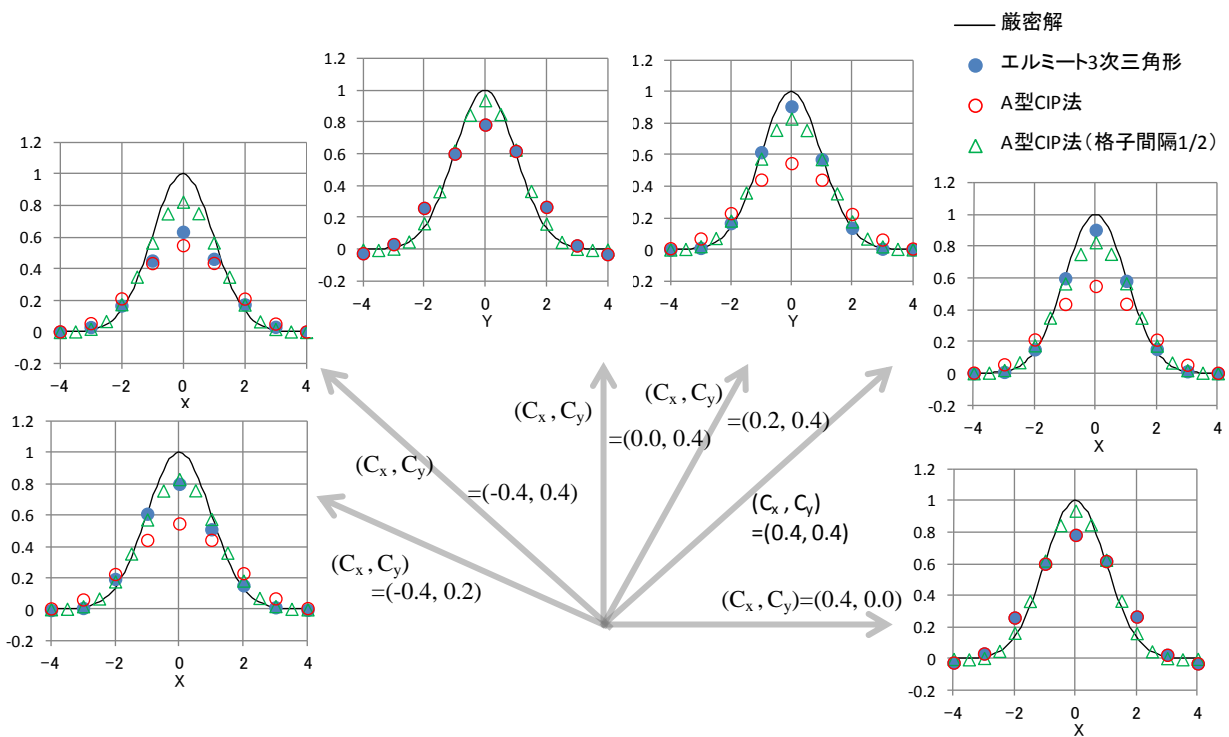


図5 断面形状による移流計算結果の比較

素の結果は全く同じとなっている。A型CIP法は流れがx軸あるいはy軸と平行な場合のほうが良好な結果となり、エルミート完全3次三角形要素は平行でないほうが良好となる傾向がある。また、分布形状の変形の特徴としては、A型CIP法では、流れと直交する方向に扁平化することに対して、エルミート完全3次三角形要素では流れの方向に扁平化する傾向がみられる。

エルミート完全3次三角形要素は、 C_x 、 C_y がともに正の場合に良好な精度を示しており、短辺と同じ長さの格子間隔のものを凌ぎ、格子間隔を半分にしたものに匹敵する。

これに対して C_x が負となっている場合には精度の低下が比較的顕著であり、値の減衰と平面形状の扁平化がみられる。 (C_x, C_y) が $(-0.4, 0.4)$ となっているケース、すなわち、流向が三角形要素の斜線と完全に平行になっている場合にエルミート完全3次三角形要素による精度の低下が最も激しくなるが、この場合でも、三角形短辺長と同じ格子間隔のA型CIP法と比較すると、ピーク値は僅かながら大きくなっている。

以上のように、ここでの数値実験で対象としたガウシアン型初期条件の移流計算に関しては、エルミート完全3次三角形要素を用いた差分スキームは、流れの向きが

三角形の辺と平行な場合には精度が低下し、三角形短辺長と同じ格子間隔のA型CIP法と同程度となるが、それ以外では、格子間隔を短辺長の半分としたA型CIP法に迫る精度を示した。

4. 安定性解析による検討

数値実験にみられた傾向を別の観点から確認するため、ノイマンの方法による安定性解析を行った。従属変数に対して単振動の関数形を仮定すると、求値格子点を原点とする座標(X, Y)に位置する格子点および三角形要素の重心での諸量 $F_{X,Y}^n$ は以下のように表わされ、求値格子点での関数値 \hat{F}^n に位相差に対応した値を乗じることによって与えられる。

$$F_{X,Y}^n = \hat{F}^n \exp[I(k_x X + k_y Y)] \quad (5)$$

ここで、 I : 虚数単位, (k_x, k_y) : (x, y) 方向の波数である。これによって、求値格子点でのn+1ステップにおける関数値 \hat{S}^{n+1} 、微分値 $\partial_x \hat{S}^{n+1}$ および $\partial_y \hat{S}^{n+1}$ はnステップにおける $\{\hat{S}^n, \partial_x \hat{S}^n, \partial_y \hat{S}^n\}$ の線形和で表現される。この線形代数式の固有値は複素数となるが、その振幅と位相は対応する固有ベクトルの比率で $\{\hat{S}^n, \partial_x \hat{S}^n, \partial_y \hat{S}^n\}$ を線形結合した量に対する増幅率と相対位相誤差を与える。これに対して、白石・松岡⁹⁾のように、関数値と微分値の間に以下の関係を仮定して簡便化した検討を行っている例があり、今回もこれを採用する。

$$\partial_x S_{X,Y}^n = I k_x \hat{S}^n \exp[I(k_x X + k_y Y)] \quad (6)$$

$$\partial_y S_{X,Y}^n = I k_y \hat{S}^n \exp[I(k_x X + k_y Y)] \quad (7)$$

これによって、求値格子点でのn+1ステップにおける関数値 \hat{S}^{n+1} は、nステップにおける値 \hat{S}^n に一つの複素数を乗じただけの形で表わされ、この複素数の振幅と位相より計算スキームの増幅率と相対位相誤差を検査することができる。ただし、式(6)および式(7)は従属関数が3次式で表現される範囲内でのみ正しく、計算アルゴリズム上で普遍的に保証されているものではない。したがって、ここでの誤差解析には多少の誤差が伴う。

増幅率と相対位相誤差を流向に対して整理した結果が図-6である。増幅率が1となる場合は数値誤差による振幅の減衰が全く生じないことを意味する。相対位相誤差は真の移流速度に対する比率を表わし、1を上回る場合には進み位相誤差、下回る場合には遅れ位相誤差を意味する。クーラン数の条件は、前出の数値実験と同様に、 C_x あるいは C_y のいずれか大きいほうを0.4とし、他方は流向から決定した。波数条件は、次式で定義される無次

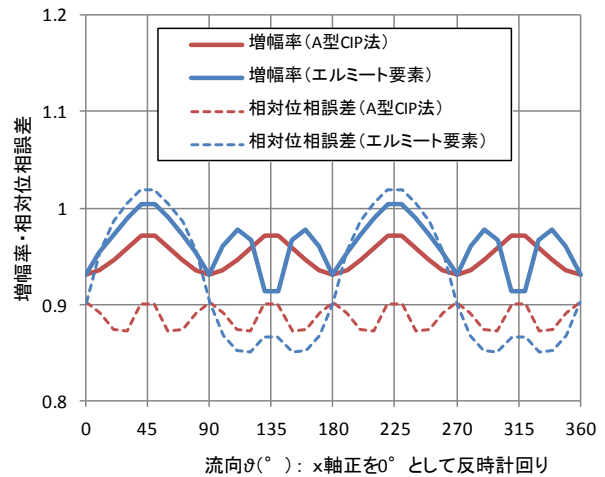


図-6 流向と増幅率・相対位相誤差

元波数 k_m で0.3に設定している。

$$k_m = \sqrt{\left(k_x \frac{\Delta x}{\pi}\right)^2 + \left(k_y \frac{\Delta y}{\pi}\right)^2} \quad (8)$$

すなわちナイキスト波数の約3倍の波長を有する単一波形を対象としている。これは、前出の数値実験におけるガウシアン型の初期条件の主要部の形状に合わせて設定したものである。

図-6は、前出の数値実験にみられた特徴を裏付けるものとなっている。まず、流向が座標軸と平行になる 0° 、 90° 、 180° および 270° において、2つの差分スキームの増幅率と相対位相誤差がそれぞれ一致していることが挙げられる。これは、数値実験において、これらの流向での両者の結果が全く同じになっていたことに対応している。

数値実験によれば、エルミート完全3次三角形要素を用いた差分スキームによる移流計算結果の最も顕著な特徴として、流向が三角形要素の長辺と平行になる場合に精度の低下が生じることが挙げられるが、図-6にはこの特徴が明確に現れている。ただし、数値実験においては、このような流向の下でも、エルミート完全3次三角形要素による計算結果のほうが、短辺長を格子間隔とするA型CIP法のものよりも僅かながら減衰が少なかったのに対して、図-6では、増幅率、相対位相誤差ともにA型CIP法が精度において上回るという結果になっている。この不整合については、式(6)および式(7)の仮定を用いたことによる誤差解析精度の問題が関係している可能性がある。

これら以外の流向では、エルミート完全3次三角形要素による計算結果が辺長を格子間隔とするA型CIP法のものより厳密解との整合が良好だった点については、数値実験と図-6の結果は符合しており、数値実験にみられた特徴を誤差解析で裏付ける結果となっている。

5. おわりに

CIP法を非構造格子に適用する方法の一つであるエルミート完全3次三角形要素について移流計算精度の検証を行った。矩形格子を対角線で2つのエルミート完全3次三角形要素に分割したスキームを用いて平面問題におけるCIP法の基本形といえるA型CIP法との比較を行ったところ、三角形要素は流れが境界線と平行に近づくと精度が低下するという特性を有しているが、それ以外の条件では、格子間隔を半分にした矩形格子のモデルに迫る精度を示した。複雑な境界条件への適用性が高いという非構造格子としての特徴に加え、移流計算の精度自体における特性が把握できたことの意義は大きいと考える。

要素分割において上記のような特性を考慮するとともに、このような方向依存性に対する改良が今後の課題であると考えられる。

参考文献

- 1) 矢部 孝, 内海隆行, 尾形陽一: CIP 法—原子から宇宙までを解くマルチスケール解法—, 222p., 森北出版, 2003.
- 2) 桜庭雅明, 弘崎 聡, 樫山和男: 自由水面流れのための CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕獲法の構築, 応用力学論文集, Vol.6, pp.215-222, 2003. など
- 3) 奥村 弘, 丸岡 晃: 自由界面問題に対する Semi-Lagrange Galerkin(SLG)法の評価, 応用力学論文集, Vol.12, pp.155-162, 2009.
- 4) 金山 進, 清水琢三, 近藤浩右: 移流拡散方程式の高精度数値計算法, 第 35 回海岸工学講演会論文集, pp.287-291, 1987.
- 5) 白石和也, 松岡俊文: CIP 法を用いた特性曲線法による音響波動シミュレーション, 物理探査, 第 59 巻第 3 号, pp.261-274, 2006.

A VERIFICATION OF THE ACCURACY OF ADVECTION CALCULATION BY HERMITE ELEMENT WITH COMPLETE CUBIC POLYNOMIALS ON THE COMPARISON WITH THE A-TYPE CIP SCHEME

Susumu KANAYAMA and Hiroshi OKUMURA

Adoption of Hermite element with complete cubic polynomials is one of the choices to apply the CIP scheme to unstructured triangular meshes. This would be expected to be an effective method to solve advection problems in complicated boundary with high accuracy. In this study, characteristic of numerical error of advection calculation with Hermite triangular element was compared with that of A-type CIP scheme by numerical experiments and Von Neumann stability analysis. Dependence of numerical error of the Hermite triangular element on the flow directions was revealed.