土木学会論文集B3(海洋開発), Vol. 69, No. 2, I_706-I_711, 2013.

数値波動水路を用いた津波解析における減衰・透過境界部での問題とその対策

関本　恒浩

正会員　五洋建設株式会社　技術研究所　（〒329-2746 栃木県那須塩原市四区町1534-1）
E-mail:Tsunehiro.Sekimoto @mail.penta-ocean.co.jp

東日本大震災以降，数値波動水路を用いた津波解析が数多く実施されている．津波のような長周期波に対する数値シミュレーションを行う場合，エネルギー減衰帯と開境界による無反射境界条件処理が通常波のように有効に機能しないことがある．本研究では，線形長波理論を用いて理論的な検討を実施し，エネルギー減衰帯内では波数の変調が生じ，開境界条件であるSommerfeldの放射条件を大きく逸脱する可能性を示した．また，長周期波は，エネルギー減衰帯内で反射を生じやすいことを指摘するとともに，これらについて，モデル方程式を用いて反射率の評価を行い，本研究の範囲ではエネルギー減衰帯における反射波の発生が顕著であることを確認した．また，津波のような長周期波に対しては，エネルギー減衰帯を用いず，開境界処理のみを行うほうが良いことを指摘した．

Key Words : *tsunami ,numerivucal simulation,open boundary, energy dissipation zone*

1.　はじめに

東日本大震災以降津波防災に対する関心が高まり，津波の来襲状況や構造物の被災メカニズムの解明など種々の検討が行われている．被災メカニズムの検討においては，水理模型実験による検討は欠かせないものの，近年の計算機の進歩や数値解析ツールの充実により，数値波動水路による数値解析を用いて津波の検討を行う機会が増えている． 数値波動水路を用いて数値解析を行う際，水路端の境界条件として透過境界条件のみではなく，より確実な無反射条件を実現するためエネルギー減衰帯を併用することが一般的である．しかしながら，津波のような非常に周期の長い波に対しては，この境界条件処理がうまく機能せず，反射波が増大して計算結果に不具合を発生させる場合がある．本研究では，この原因を簡単な理論的考察によって明らかにするとともに，その対応策について考究するものである．なお，ここでは数値波動水路として現在広く用いられていることから，CADMAS-SURF[1]を例として議論を進める．

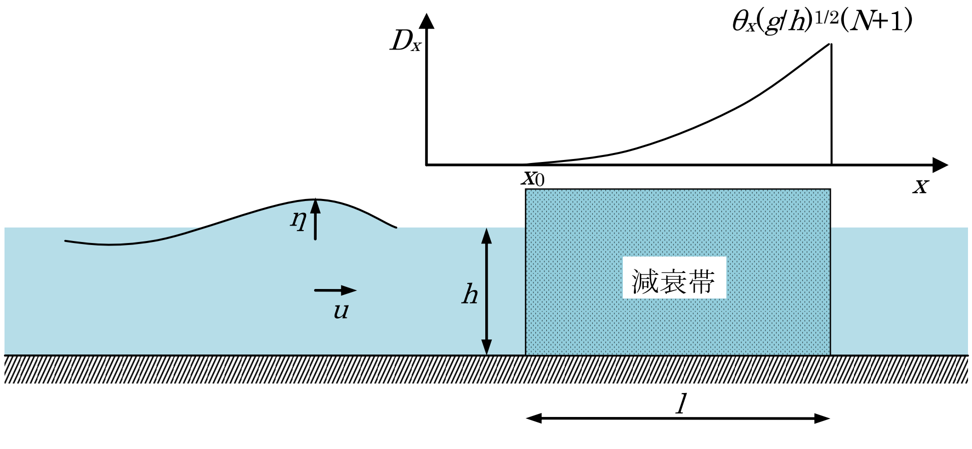


図-1　エネルギー減衰帯と関係諸量の定義図

2. CADMAS-SURFにおける減衰帯の考え方

CADMAS-SURF では，エネルギー減衰帯において運動方程式に流速に比例する抵抗を表す項を与え，波浪の減衰を実現している．この手法は，CADMAS-SURF だけでなく、他の数値波動水路においても広く用いられている[2),3)]．CADMAS-SURF の連続式及び x 方向の運動方程式は次のとおりである．

$$\frac{\partial \gamma_x u}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_z w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\lambda_v\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \lambda_x uu}{\partial x}+\frac{\partial \lambda_z wu}{\partial z}&=\frac{\gamma_v}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\gamma_x\nu_e\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\gamma_x\nu_e\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}\\&-D_x u-R_x\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，u，w はそれぞれ x 方向，z 方向の流速，ρ は密度，p は圧力，ν_e は分子動粘性係数と渦動粘性係数の和，g は重力の加速度，γ_v は空隙率，γ_x，γ_z は x 方向，z 方向の面積透過率，λ_v，λ_x および λ_z は構造物から受ける慣性力の効果を表す．また D_x はエネルギー減衰帯のための係数であり，R_x は多孔質体から受ける抵抗力を表す．エネルギー減衰の係数 D_x は，次に示す Cruz ら[2)]の提案した式が採用されている（図-1 参照）．

$$D_x=\theta_x\sqrt{\frac{g}{h}}(N+1)\left(\frac{x-x_0}{l}\right)^N \tag{3}$$

ここで，hは水深，lとx_0はそれぞれエネルギー減衰帯の長さと開始位置，Nは分布関数の次数，θ_xは無次元の係数である．式(3)の右辺 $\theta_x\sqrt{g/h}$ は減衰の強さを表し，$(N+1)[(x-x_0)/l]^N$ は減衰の強さの空間分布を表している．Cruzら[2)]は，次元解析に基づき減衰の強さについていくつかの関数形を提案しているが，高周波数帯における減衰性能の良さから，$\theta_x\sqrt{g/h}$ を採用している．また，減衰強さの空間分布は，減衰帯の前面で0となり波の進行方向に徐々に大きくなる関数形として線形型，べき乗型および双曲線型について検討している．このうち，CADMAS-SURFにおいてはべき乗型が用いられているが，Cruzら[2)]が提案したものの2倍となるように設定されている．なお，CADMAS-SURFにおける計算上のデフォルト値はN=2，θ_x=0.6である．

3. エネルギー減衰帯における波の挙動

Cruz ら[2)]は，線形化された Boussinesq 方程式（線形分散波）を用いて検討しているが，線形長波方程式でもほぼ同じ議論が可能なので，ここでは線形長波方程式について検討する[4),5)]．１次元の連続の式と運動方程式は，次のようになる．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}+D_x u=0 \tag{5}$$

ここで，ηは水面変動である．式(5)を線形化し，式(4)を用いてηを消去すると次式を得る．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-gh\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+D_x\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{6}$$

いま，式(6)の解として

$$u=U(x)\exp[-i\omega t] \tag{7}$$

を仮定とすると，

$$gh\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}+\omega^2\left(1-\frac{iD_x}{\omega}\right)U(x)=0 \tag{8}$$

D_xを空間的に一定値と仮定すると，この解は，

$$U(x)=a\exp[\pm i\lambda x],$$

$$\lambda=\frac{\omega}{\sqrt{gh}}\sqrt{1-\frac{iD_x}{\omega}}=k\sqrt{1-\frac{iD_x}{\omega}}, \tag{9}$$

$$k=\frac{\omega}{\sqrt{gh}}$$

ここで a は流速振幅，k は本来の波数である．エネルギー減衰帯における波数は，本来の波数に減衰帯の抵抗による複素補正項がかかるため，新たな波数 λ は複素波数となる．次に，複素波長 λ についてさらに整理する．x の正の方向に伝播する波を考えると式(9)と複合同順として，

$$\begin{aligned}\lambda=&\pm\frac{\omega}{\sqrt{gh}}\left(\frac{\sqrt{\omega^2+D_x^2}+\omega}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\\&\pm i\frac{\omega}{\sqrt{gh}}\left(\frac{\sqrt{\omega^2+D_x^2}-\omega}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{10}$$

で表される．式(9)の指数部が虚数なので，複素波数の実部が波の振動すなわち波数を表す項となり，虚数部が波の減衰を表す．式(10)を式(9)に代入すると，

$$U(x)=aK(x)\exp\left[i\frac{\omega}{\sqrt{gh}}\left(\frac{\sqrt{\omega^2+D_x^2}+\omega}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}}x\right] \tag{11}$$

$$K(x)=\exp\left[-\frac{\omega}{\sqrt{gh}}\left(\frac{\sqrt{\omega^2+D_x^2}-\omega}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}}x\right] \tag{12}$$

で表される．なお，線形化された Boussinesq 方程式を考える場合は，上式で $\sqrt{gh} \to \sqrt{gh-\omega^2 h^2/3}$ とすればよい．減衰の係数を表す λ の虚数部 λ_I について $D_x >> \omega$ とすると，

$$\lambda_I = k\left(\frac{\sqrt{\omega^2+D_x^2}-\omega}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{gh}}\sqrt{\frac{\omega D_x}{2}} \tag{13}$$

したがって，減衰係数は低周波数（長周期）では小さく，高周波数（短周期）では大きくなる．次に実質の波数を表す λ の実数部 λ_R について調べる．虚数部の場合と同様に $D_x >> \omega$ とすると，

$$\lambda_R = k\left(\frac{\sqrt{\omega^2+D_x^2}+\omega}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \approx k\sqrt{\frac{D_x}{2\omega}} \tag{14}$$

したがって，エネルギー減衰帯内では減衰帯による抵抗によって実質的な波数が大きくなること，すなわち波長が短くなることがわかる．つまり，減衰係数が大きくなるほど，また，周波数が低くなるほど（周期が長くなるほど）波長の減少の割合は大きくなる．波長の減少は波速が遅くなる効果をもたらすことに注意が必要である．なお，式(13)と式(14)の近似式は全く同一であるが，説明を明確にするために表示の仕方を変えている．

図-2は周波数で無次元化したエネルギー減衰帯の減衰強さに対する式(10)で示される波数の実数部と虚数部について示したものである．

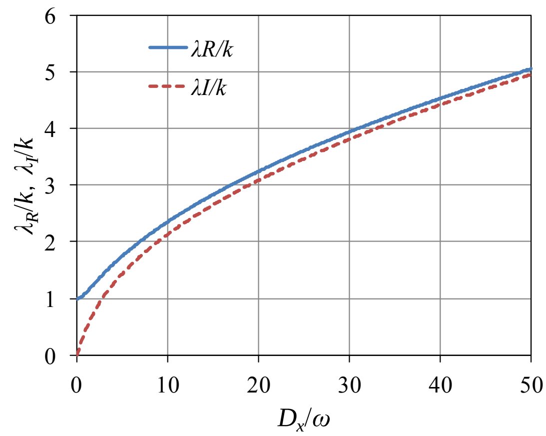


図-2　エネルギー減衰帯の減衰強度と波長の変調の関係

4．エネルギー減衰帯を設けた場合の透過境界の問題点

(1) 透過境界条件の問題点

前節では，エネルギー減衰帯を設けた場合波長の減少，すなわち波速の減少が生ずることを示した．ここでは，波速の減少に伴う透過境界における問題点を検討する．CADMAS-SURF では透過境界として Sommerfeld の放射条件を採用している．Sommerfeld の放射条件は次式で表される．

$$\frac{\partial f}{\partial t}+C\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{15}$$

ここで，C は波速，f は流速などの物理量である．これは物理量 f が波速 C で境界を通り抜けることを意味しており，透過効果を発揮させるためには波速 C を適切に見積もらなければならない．もし，物理量の実際の移動速度が異なる場合，新たな波（反射波）を発生させる．物理量の実際の移動量を C_0 とすると，実際の物理量の移動は次式で表される．

$$\frac{\partial f}{\partial t}+C_0\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{16}$$

もし，境界条件として式(15)を用いた場合，放射条件は

$$\frac{\partial f}{\partial t}+C\frac{\partial f}{\partial x}=\left(C-C_0\right)\frac{\partial f}{\partial x} \tag{17}$$

となり，境界から単位時間当たり $\left(C-C_0\right)\partial f/\partial x$ の物理量が造波（この場合は反射）されることになる．前節でみたように，減衰帯を設置すると波長が短くなるため，減衰帯内の波速と放射条件で用いる波速の違いによって有意な反射波が生じることになる．特に，津波のように波長が極めて長い波動現象では，減衰帯による波の減衰がほとんどないうえに波速は遅くなるため，境界面から大きな反射波を生ずることになる．

(2) 波速の評価に起因する問題点

首藤(1981) [6]によれば，非線形長波方程式による一様水深上を伝播する波の波速は，

$$C = 3\sqrt{g\left(h+\eta\right)}-2\sqrt{gh} \tag{18}$$

で表される． CADMAS-SURF における透過境界の設定では，初期水深に対して微小振幅波理論を用いて波速を求めているため式(18)で表現される非線形効果が十分に反映されない．また，津波解析においては，岸側境界付近では初期水深よりも来襲津波高が高くなる場合が多く，時々刻々の水位変動が時間的に大きく変化するため，放射条件を求めるための基準の水深を計算上の初期水深によって評価することがかならずしも妥当とは言えない．これらより波速の評価自体にも問題があることがわかる．

(3) その他の問題点等

エネルギー減衰帯の減衰強さを強くすると，エネルギー減衰帯内において波の反射が発生する．特に，周期が長い場合は，この傾向が顕著となり，エネルギー減衰帯において大きな反射波が形成される．周期が長い場合の

エネルギー減衰帯内における顕著な反射波の形成については，今のところ理論的な裏づけは取れておらず，今後解明すべき課題といえるが，減衰帯内の通水能力を超える水が流入しようとするため，反射波が形成されるものと推察される．したがって，これについての配慮も必要である．

なお，エネルギー減衰帯内では波長が短くなることによって，波の進行方向に群速度（この場合は波速と同じ）の減少が生じ，波速の減少率，すなわち波数の増加率の1/2乗に比例して波高が増大する．波高の増大率K_Hは，

$$K_H=\sqrt{\frac{\omega/k}{\omega/\lambda_R}}=\sqrt{\frac{\lambda_R}{k}}=\left(\frac{\sqrt{\omega^2+D_x^2}-\omega}{2\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{19}$$

このように，エネルギー減衰帯の中では波高が増大するため，あたかも反射波が非常に大きくなっているよう見える．しかしながら，エネルギー減衰帯を抜けると波長はもとの長さに戻ることから波高も式(19)にしたがってもとの高さに戻る．ただし，エネルギー減衰帯の終端では波高が増大した状態で透過境界に到達するため，波の非線形性の影響を受けて，波速の変化が生じる．このことによって透過境界面からの反射波が増える可能性があることにも注意すべきである．

5. 透過境界とエネルギー減衰帯における反射特性に関する検討

(1) モデル方程式

まず，流速として次式を仮定する．

$$U(x)=a\exp\left\lfloor \pm i\int_0^x \lambda(x)dx\right\rfloor , \tag{20}$$

$$\lambda(x)=\frac{\omega}{\sqrt{gh}}\sqrt{1-\frac{iD_x(x)}{\omega}} \tag{21}$$

式(20)を満足する微分方程式は，式(8)で示される微分方程式とは異なり，次式で示すような複素波数を微分した項が付加項として加えられた形となる．

$$gh\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}+\omega^2\left\lfloor\left(1-\frac{iD_x(x)}{\omega}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-\frac{iD_x(x)}{\omega}}\right)\right\rfloor U(x)=0 \tag{22}$$

付加された項は複素波数の平方根を取ったものの勾配であるため，通常のエネルギー減衰帯を考える上では，Nがよほど大きくない限りは，この付加項によって生ずる誤差は比較的小さいものと考えられる．したがって，式(22)をモデル方程式として，その解である式(20)を用いた検討を行う．

(2) エネルギー減衰帯内からの反射を考慮しない場合

a) エネルギー減衰帯内の波の変形

今，座標系は図-1 に示すとおりとし，xの正の方向にエネルギー減衰帯が存在するものとする．ここでは，式(3)においてx_0=0 すなわち，減衰帯の開始地点をxの原点とし，x=l で減衰帯が終了するとともに透過境界が存在する．

まず，x=0 における流速を振幅を a_0とすると，入射波は，次式で表される．

$$u(x)=a_0\exp\left\lfloor i\left(\int_0^x\lambda(x)dx-\omega t\right)\right\rfloor \tag{23}$$

エネルギー減衰帯の放射境界側の端 x=l では，x の正の向きの進行波の流速は次式となる．

$$u(l)=a_0\exp\left\lfloor i\left(\int_0^l\lambda(x)dx-\omega t\right)\right\rfloor \tag{24}$$

x=lにおける進行波の流速振幅 a_lは，

$$a_l=a_0\left|\exp\left[i\int_0^l\lambda(x)dx\right]\right|=a_0\exp\left[-\int_0^l\lambda_I(x)dx\right] \tag{25}$$

b) 放射境界からの反射波

放射条件の吟味においては境界における諸量を用いて評価すべきなので，x=l における流速は，反射波も考慮して

$$u=a_l\exp[i(\lambda_R(l)x-\omega t)]-b_l\exp[i(\lambda_R(l)x+\omega t)] \tag{26}$$

と表すことができる．これを，式(15)で表されるSommerfeldの放射条件に適用する．このときの波速Cは$\sqrt{gh}$である．式(26)を式(15)の関数 f に代入すると，次式を得る．

$$\frac{b_l}{a_l}=\frac{\omega-\sqrt{gh}\{\lambda_R(l)+\lambda_R'(l)l\}}{\omega+\sqrt{gh}\{\lambda_R(l)+\lambda_R'(l)l\}} \tag{27}$$

$$\lambda_R'(x)=\frac{\partial}{\partial x}\lambda_R(x) \tag{28}$$

これが，放射境界における実質的な反射率である．

放射境界 x=l において反射した波は，エネルギー減衰帯を通ってさらに減衰が進む．その減衰の割合は式(25)と同じで，

$$b_0=b_l\left|\exp\left[\int_l^0\lambda(x)dx\right]\right|=b_l\exp\left[\int_l^0\lambda_I(x)dx\right] \tag{29}$$

ここで，$|*|$は絶対値をあらわす．したがって，x=0 における，最終的な反射率K_Rは，

$$\begin{aligned}K_R&=\frac{b_0}{a_0}\\&=\frac{\omega-\sqrt{gh}\{\lambda_R(l)+\lambda_R'(l)l\}}{\omega+\sqrt{gh}\{\lambda_R(l)+\lambda_R'(l)l\}}\exp\left[-\int_0^l 2\lambda_I(x)dx\right]\end{aligned} \tag{30}$$

となる．

(3) エネルギー減衰帯内からの反射を考慮する場合

エネルギー減衰帯内で発生する反射波を理論的に取り扱うためには，なんらかの工夫が必要であり，今後の課題である．ここでは，エネルギー減衰帯における平均的なエネルギー減衰が，減衰帯内で一様に発生するものと近似的に考え，減衰帯内の水位および流速を外部領域，すなわち，**図-1**においてx_0=0としたときの，xの負の領域とのマッチングを行う．この場合．反射波は，x=0において発生するとしたことになるため，厳密な意味では領域内で発生した反射波を考慮できていない．

まず，外部領域の水位変動η_oおよび流速変動u_oは次式で表されるとする．

$$\eta_o = \eta_i + \eta_r \tag{31}$$

$$u_o = u_i - u_r = \frac{\omega}{kh}(\eta_i - \eta_r) \tag{32}$$

また，減衰帯の内部の領域の水位変動をη_dとすると．流速変動u_dは次式で表される．

$$u_d = \frac{\omega}{\bar{\lambda}_R h}\eta_d \tag{33}$$

$$\bar{\lambda}_R = \frac{1}{l}\int_0^l \lambda_R(x)dx \tag{34}$$

ここで，x=0 において，質量と運動量の連続から次のマッチング条件が与えられる．

$$\eta_o = \eta_d \tag{35}$$

$$u_o = u_d \tag{36}$$

これらから，反射率は

$$K_R = \frac{\eta_i}{\eta_r} = \frac{(\bar{\lambda}_R/k)-1}{(\bar{\lambda}_R/k)+1} \tag{37}$$

となる．

6. 数値計算

(1) 計算条件

計算に用いた水路断面を**図-3**に示す．水深100mの一様水深水路とし，津波が伝播するメインの水路部は延長20kmとした．水路の両端に適宜エネルギー減衰帯を配置した．減衰帯の強さは数種類に変化させた．また計算条件を**表-1**に示す．津波波形は，できるだけ滑らかな造波を行い，かなり扁平な計算格子でも安定的に計算が行えるようにした．計算に用いた津波波形を式(38)に示す

$$\eta_I = \frac{a}{2}(1+\cos\omega t), \quad -\pi < \omega t < \pi \tag{38}$$

(2) 計算結果

図-4は，エネルギー減衰帯幅l=5000mとl=10000mに対する計算結果と，近似理論式(30)および式(37)とを比較したものである．入射波と反射波の分離は，減衰帯前面5000mの地点に置ける水位変動と流速変動を用いて，線形長波理論を適用し，それぞれの振幅比として反射率を算出した．2つの減衰帯幅とも式(37)の方が数値計算との適合性が良かった．すなわち，この結果からは透過境界部からの反射というよりは，減衰帯内部で発生した反射波の影響が強いことが伺える．**図-5**は，エネルギー減衰帯幅10000mの条件における津波水位の入射波と反射波の時系列波形を示したものである．津波の波速が40m/s程度であることから，入射波と反射波のピークの出現時間を考えると反射波は減衰帯のなかで発生したものであることが確認できる．

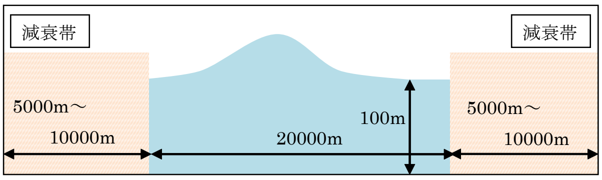


図-3 CADMAS-SURF による津波解析に用いた水路諸元

表-1 計算条件

パラメタ	設定条件
時間刻み	Auto（安全率0.2）
差分スキーム	VP-DONOR 0.2
Δx, Δz	100m, 1m（水面付近）
左右境界	開境界
造波ソース	マトリックス：式(38)
津波高	4.5m
津波周期	1800s

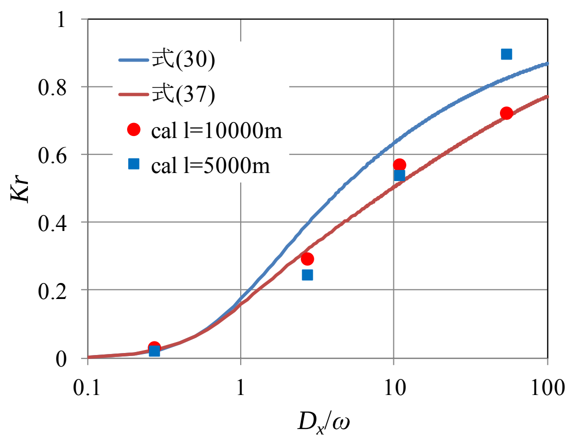
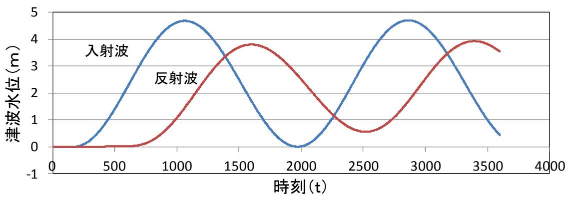


図-4 CADMAS-SURF による計算結果と近似理論との比較



図–5 CADMAS-SURF による津波時系列の入反射波分離推定結果

7. おわりに

数値波動水路を用いて津波解析を行う場合，通常の波の場合と同様に水路端の境界条件として透過境界条件とエネルギー減衰帯を併用すると，反射波の発生により計算への影響が大きいことを示した．可能性のひとつは，減衰帯による波長の減少効果のため，Sommerfeldの透過境界で反射を生じてしまうことであり，もうひとつは津波などの長周期波の場合減衰帯内部で反射波が発生することを示した．数値計算による検討の結果，本研究の条件においては，後者すなわち，減衰帯内部で反射波が発生していることが確認された．

今後長周期波に対して境界での消波を行う場合，エネルギー減衰帯は用いず，透過境界のみを用いた方が反射波の低減が期待できる．CADMAS-SURFの場合，透過境界の条件設定においては微小振幅波理論に基づいて波速を与えるため，浅海域のような非線形性が強い場合には，透過性能が低下する可能性があり，さらに注意が必要である．

参考文献

1) (財)沿岸開発技術研究センター：数値波動水路の研究・調査，数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会報告書，296p.，1962.
2) Eric Cruz・横木裕宗・磯部雅彦・渡辺晃：非線形波動方程式に対する無反射境界条件について，海岸工学論文集，第 40 巻，pp.46-50，1993.
3) 平石哲也・上原功・鈴木康正:ブシネスク方程式を用いた波浪変形計算法の適用性，港研資料，No.814，22p.，1995.
4) 近藤淑郎・竹田英章：消波構造物，275p.，森北出版，1983.
5) 高橋英嗣・水口優 : 消波工境界での水位差と反射について，海岸工学論文集，第 48 巻，pp.711-715，2001.
6) 首藤信夫：海の波の水理，217p.，技報堂出版，1983.

SOME PROBREMS ON OPEN BOUNDARY WITH WAVE DUMPING LAYER IN TUNAMI ANALYSIS BY NUMERICAL WAVE FLUME

Tsunehiro SEKIMOTO

When tunami analysis is conducted, some probrems occuer according to open boundary with wave dumping layer. Reflected waves from open boundary or wave dumping layer effected to the analysed results. We studied these probrems by easy theoretical approach. We found wave number modulation occuer in wave damping layer and Sommerfeld’s open boundary condition can not be satisfied. Moreover we note that wave reflection also generated in wave dumping layer. We confirm these two generation system of reflected waves by model equation analysis. After comparison numerical simulation and theoretical approach, waves reflected in the wave dumping layer in this study condition. We pointout that wave dumping layer should not be use in long wave nanalysis include tunami analysis.